

# ソフトインターフェースを介した動的制御のモデル化と安定性解析

## Modeling and Stability Analysis of Dynamic Control through A Soft Interface

○ 柴田 瑞穂 平井 慎一

立命館大学ロボティクス学科

○ Mizuho SHIBATA, Shinichi HIRAI

Dept. of Robotics, Ritsumeikan Univ.

**Abstract:** We analyze the stability of dynamic control through a *soft interface*, the viscoelastic material between a manipulating finger and manipulated object. First, we model a dynamic control system through a soft interface. The system is described in continuous-discrete time. Second, we formulate the dynamics using the modified z-transform in the continuous-discrete time system for feedback and feedforward control. Thus, we show that the stability of the system depends on viscoelasticity of the soft interface for feedback control. In particular, we point out that, in critical stability, the relationship between material viscosity and sampling time is not monotonous. We also analyze this phenomenon by the root locus method. Finally, we compare the stability analysis by the modified z-transform and a regular z-transform. Thus, we demonstrate that the relationship is specific to the continuous-discrete time system.

**Keywords:** Soft interface, Dynamic control, Viscoelasticity, Continuous-discrete time system, Modified z-transform

## 1 緒言

ロボットハンドでの物体操作に代表されるような、対象物をマニピュレータを用いて把持・操作する研究は、従来より活発に成されている [1, 2]。しかし、これらの研究の多くは、マニピュレータが剛体であり、対象物との接触状態を剛体点接触を仮定しており、操作過程を準静的として扱っている研究が多い。

近年では、ハンドの指先に柔軟体を用いて物体を把持・操作する研究が増えてきている [3, 4]。一般に、指先に柔軟体を用いることによって、面接触による安定把持、高い摩擦力、接触における衝撃力の低減などの利点が期待される。動的な把持操作を実現した例として、Arimoto らが、指先に弾性体と仮定した柔軟体を有する 2 指ハンドを用いて、物体のピンチング動作を実現している [3]。これらの報告では、受動性解析を基にセンソリィードバックの考え方から、安定把持を実現しながら物体の位置と角度を同時に制御する制御則を提案している。また、長瀬らは、文献 [3] で用いられた、弾性体の動径方向の圧縮変形によって指先力が発生するという仮定に加え、回転方向の圧縮変形によっても指先力が発生するとして、解析・実験を行った [4]。これらの研究では、実験において指先に粘弾性体を使用していると考えられるが、物性としての粘性は考慮されていない。マニピュレータと対象物の間に粘弾性体が存在するシステムで動的な物体操作を行う場合、その粘性が過渡応答に影響を与えることは直感的に理解できるが、これを考慮した研究は見受けられない。

柔軟指に用いる物質を選定する観点から、粘弾性体を評価する研究がある。Shimoga らは、ロボットフィンガーの指先に使用することを前提に、粘弾性体を、(1) 衝撃力の軽減、(2) なじみ、(3) ひずみエネルギーの消散性の 3 つの観点から比較検討している [5]。この報告では、総合的にゲルが最もよいという結論に達している。また、彼らは粘弾性体のモデルを構築し、実験的に検証している [6]。しかし、物質の選定において、粘性は考慮されていない。

このように、使用する柔軟体の物性として、粘性を動的な制御に対して評価した研究はなく、どのような指針で粘弾性体を選ばよいかについては未知の部分が多い。そこで、本論文では、マニピュレータと対象物の間に粘弾性体が存在する物体操作を、ソフトインターフェースを介した動的制御と名付け、その特徴を明らかにする。まず、ソフトインターフェースを介するシステムでは、対象物は連続系、制御系は離散系で表現されることを示す。連続離散時間系を考慮した運動方程式を拡張  $z$  変換の考え方から導出する。次に、システムが安定となる最大の制御周期の観点から安定性を解析する。最後に、拡張  $z$  変換による連続離散時間表現の有効性を検証するために、通常の  $z$  変換を用いて安定性を解析し、両者を比較する。

## 2 定式化

本章では、ソフトインターフェースを介した動的制御をモデル化し、系の運動方程式を導出する。ソフトインターフェースを介した動的制御は連続離散時間系で表現される。この連続離散時間系における運動方程式を、拡張  $z$  変換を用いて定式化する。本論文では、例として、マス・バネ・ダンパーモデルを基にした力制御を考える。

### 2.1 連続離散時間系

Fig.1 に、ソフトインターフェースを介した物体操作を行うシステムの例を示す。一般に、制御にはデジタルコントローラが使われる。すなわち、ソフトインターフェースを介した動的制御では、Fig.1 に示されるように、制御系は離散系、粘弾性体を含む対象物は連続系として表現される。したがって、ソフトインターフェースを介した動的制御は連続離散時間系で表現される。本論文では、連続離散時間系における系の運動方程式を、拡張  $z$  変換の考え方から定式化する。通常の  $z$  変換がサンプリング時刻での応答だけしか取り扱うことができないのに対して、拡張  $z$  変換ではサンプリング時刻以外のすべての時刻での応答を取り扱うことができる [7]。すなわち、サンプリング時刻以外の応答を解くことで任意の時間における応答を求める。

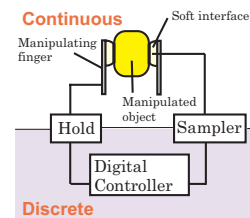
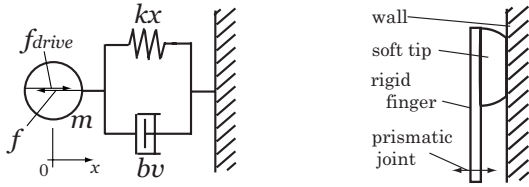


Fig.1: System of manipulation on contact with soft interface

### 2.2 ソフトインターフェースのモデル化

Fig.2-(a) に、本論文で使用する、線形のパネ・マス・ダンパーモデルを示す。これは、Fig.2-(b) で示される、指先に粘弾性体を有するロボット指が壁を押す作業に相当する。ここで、 $x, v$  はそれぞれ指の位置、速度である。また、 $m$  は指先を含めた指全体の質量、 $f$  は指先の変形による発生力、 $f_{drive}$  は指がモーターに与えられる駆動力である。 $k, b$  はそれぞれ指先に用いる粘弾性体の弾性係数、粘性係数である。本論文では、指が持つ物性である  $m, k, b$  は時不変であり、正の値であると仮定する。



(a) Simplified model (b) Robot finger with soft tip

Fig.2: Model of manipulation on contact with soft interface

### 2.3 フィードバック制御の定式化

本節では、フィードバック制御を行った場合の運動方程式を導出する。制御則には把持力の P 制御を用いる。目標把持力を  $F_d$ 、力フィードバックゲインを  $K_f$ 、システムの制御周期を  $T$  とする。このとき区間  $t \in [nT, (n+1)T)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) における、指の運動方程式は次のようになる。パラメータ  $F_d$ 、 $K_f$ 、 $T$  は正である。

$$m\dot{v}(t) = -bv(t) - kx(t) + K_f(F_d - \hat{f}(t)). \quad (1)$$

ここで  $\hat{f}(t)$  は、時刻  $nT$  における力のフィードバック値である。区間  $t \in [nT, (n+1)T)$  における力のフィードバック値は、時刻  $nT$  に測定した指先の発生力である。したがって、

$$\hat{f}(t) = b\dot{x}(nT) + kx(nT), \quad n = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor. \quad (2)$$

この値は次に計測を行う時刻  $(n+1)T$  まで変化しない。ここで、 $x(nT)$  を  $x_n$ 、 $v(nT)$  を  $v_n$  とおき、 $b/m = B$ 、 $k/m = K$ 、 $K_f F_d/m = F$  とすると、システム方程式は、

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -Bv(t) - Kx(t) + F - K_f K x_n - K_f B v_n \end{cases} \quad (3)$$

と表現できる。ここで、式 (3) の  $\dot{v}(t)$  の 3 項以下は区間  $t \in [nT, (n+1)T)$  では一定値であるので、これを  $D_n$  とおく。ここで、

$$x(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -B \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ D_n \end{bmatrix}$$

と定義する。このとき、式 (3) は行列表現で、

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \quad (4)$$

と表現される。ここで、 $x_n = x(nT)$  とすると、時刻  $(n+1)T$  におけるこのシステムの解は、区間  $t \in [nT, (n+1)T)$  では、 $u(t)$  は一定値であることに注意すると、

$$x_{n+1} = e^{AT} x_n + A^{-1}(e^{AT} - I)u(t) \quad (5)$$

となる。ここで、 $I$  は 2 次の単位行列である。また、逆行列  $A^{-1}$  は、 $K \neq 0$  より必ず存在する。式 (5) は、行列  $P \in C^{2 \times 2}$ 、漸化式の不動点  $x_*$  を用いて、

$$x_n = P^n [x_0 - x_*] + x_* \quad (6)$$

と表現される。ここで、係数行列  $P$  は、

$$P = e^{AT} + A^{-1}(e^{AT} - I) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K_f K & -K_f B \end{bmatrix} \quad (7)$$

であり、システムの制御周期、物質の粘弾性特性、質量および制御則のゲインに依存する。このとき、この運動方程式の安定性は、状態遷移行列  $P$  が収束行列かどうかにかき着される。また、不動点  $x_*$  は次のようになる。

$$x_* = \begin{bmatrix} \frac{K_f}{k(K_f + 1)} F_d & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (8)$$

### 2.4 フィードフォワード制御の定式化

本節では、制御則にフィードフォワード信号を用いた場合の運動方程式を導出する。与える力を  $F_f$  とすると、フィードバック制御の場合と同様に、式 (6) と表現される。ここで、状態遷移行列  $P$  は、

$$P = e^{AT} \quad (9)$$

である。また、不動点  $x_*$  は次のようになる。

$$x_* = \begin{bmatrix} \frac{F_f}{k} & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (10)$$

## 3 フィードバック制御における安定性解析

### 3.1 スペクトル半径による安定性解析

本章では、ソフトインターフェースを介した動的制御において、フィードバック制御を行った場合の安定性を解析する。前章で述べた通り、ソフトインターフェースを介した動的制御が安定であるためには、状態遷移行列  $P$  が収束行列であればよい。行列  $P$  の固有値を  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ) とする。このとき、行列  $P$  が収束行列である必要十分条件は、スペクトル半径  $\rho(P) = \max\{|\lambda_i|\}$  が、

$$\rho(P) < 1 \quad (11)$$

である。これは、行列  $P$  の固有値  $\lambda_i$  が単位円の中にすべて含まれることを意味している。

前章でも述べた通り、ソフトインターフェースを介した動的制御における状態遷移行列  $P$  は、システムの制御周期、物質の粘弾性特性、質量および制御則のゲインに依存する。このうち、制御周期およびゲインは制御を行う際に設定するパラメータであり、特に、制御周期はサンプル値制御特有のパラメータである。また、制御周期は使用するセンサやモータの仕様にも関わる値であり、システムを構築する上で、ハードウェアの選定基準となる。ここで、システムが安定となる最大の制御周期、すなわち  $\rho(P) < 1$  を満たす最大の制御周期を安定最大制御周期  $T_{max}$  と定義する。以下では、 $T_{max}$  と諸特性の関係を検証する。

### 3.2 安定最大制御周期と弾性係数の関係

弾性係数  $k$  と安定最大制御周期  $T_{max}$  の関係を Fig. 3 に示す。ここでは、パラメータとして、 $m=0.11$  kg、 $F_d=1.1$  N、 $K_f=10$  を使用した。Fig. 3 では、 $b=1.0$  Ns/m および  $3.0$  Ns/m のときの  $T_{max}$  を図示している。このグラフより、 $k$  が大きくなるのに対して、 $T_{max}$  が単調に減少することが分かる。つまり、高剛性の物質を使用した場合には、制御周期を短く設定しなければならない。したがって、ソフトインターフェースとして低剛性の物質を採用する方が、制御周期の観点からはシステムを容易に構築することができる。

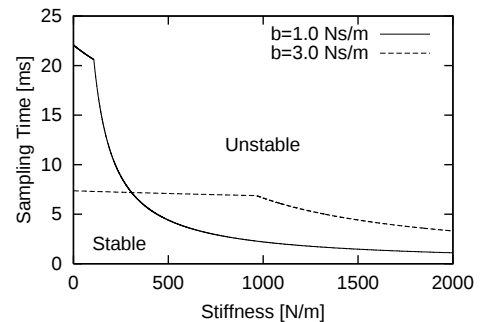


Fig.3: Critical sampling time for stiffness

### 3.3 安定最大制御周期と粘性係数の関係

粘性係数  $b$  と安定最大制御周期  $T_{max}$  の関係を Fig. 4 に示す．ここでは，パラメータとして， $m=0.11\text{ kg}$ ， $F_d=1.1\text{ N}$ ， $K_f=10$  を使用した．Fig. 4 では， $k=2000\text{ N/m}$  および  $20000\text{ N/m}$  のときの  $T_{max}$  を図示している．このグラフから，粘性と安定最大制御周期との関係は，単調ではないことが分かる．この現象は，ソフトインターフェースを介した動的制御を行う場合，弾性だけでなく，粘性も使用する物質の選定基準となることを示唆している．実測から，直径  $20\text{ mm}$  のポリウレタン製の半球粘弾性体の弾性係数が約  $2000\text{ N/m}$ ，粘性係数が約  $10\text{ Ns/m}$  であることを確認しており，このピークは実際の物体操作を考える上で，現実的な領域にある．

Fig. 5 に，状態遷移行列  $P$  の根軌跡を示す．これらのグラフでは， $k=2000\text{ N/m}$  である．それぞれのグラフでは，粘性の値は一定である．Fig. 5-(c) における， $b=4.32$  は， $T_{max}$  が最大となるとき粘性の値である．Fig. 5 から，根軌跡は単位円の端から出発する．粘性  $b$  が  $b<4.32$  であるとき，複素根が単位円と交差する．粘性  $b$  が  $b=4.32$  であるとき，出発した点とは逆側の単位円の端が根軌跡の分岐点と一致する．また， $b>4.32$  であるとき，実根が単位円と交差する．これらのグラフから，ソフトインターフェースの粘性と安定最大制御周期との関係が単調でないことが理解できる．

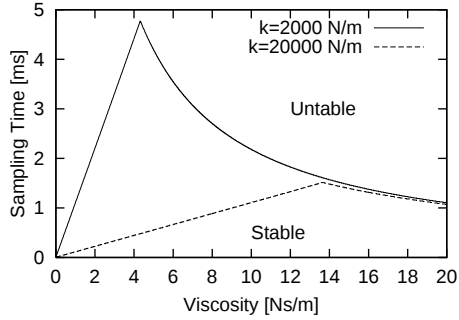


Fig.4: Critical sampling time for viscosity

### 3.4 安定最大制御周期と粘弾性特性の関係

粘弾性特性  $b$ ， $k$  と安定最大制御周期  $T_{max}$  の関係を Fig. 6 に等高線図で示す．横軸に弾性係数  $k$ ，縦軸に粘性係数  $b$ ，等高線として安定最大制御周期  $T_{max}$  を示す．パラメータとして， $m=0.11\text{ kg}$ ， $F_d=1.1\text{ N}$ ， $K_f=10$  を使用した．安定最大制御周期  $T_{max}$  は  $1\text{ ms}$  刻みに  $1\text{ ms}$  から  $10\text{ ms}$  まで示している．それぞれの等高線が尖点を持つことが分かる．Fig. 6 の点線は，Fig. 4 に示す最大の  $T_{max}$  に対応する弾性係数  $k$  と粘性係数  $b$  の組を表す．このピークを結ぶ線は尖点上を通過する．

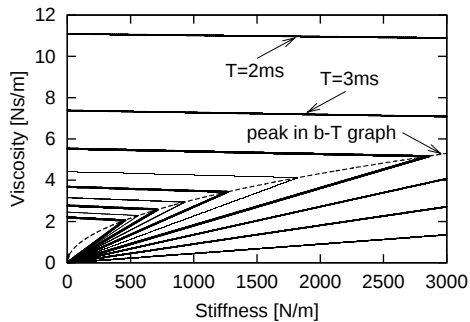


Fig.6: Critical sampling time for stiffness and viscosity

### 3.5 安定最大制御周期と質量の関係

質量  $m$  と安定最大制御周期  $T_{max}$  の関係を Fig. 7 に示す．ここでは，パラメータとして， $k=2000\text{ N/m}$ ， $b=1.0\text{ Ns/m}$ ， $F_d=1.1\text{ N}$ ， $K_f=10$  を使用した．このグラフより，ある程度の大きさの質量があれば， $T_{max}$  が一定になることが分かる．また，質量が小さい場合には， $T_{max}$  も減少している．したがって，質量を十分大きく設定すれば， $m$  は  $T_{max}$  に影響を及ぼさないと考えて差し支えない．

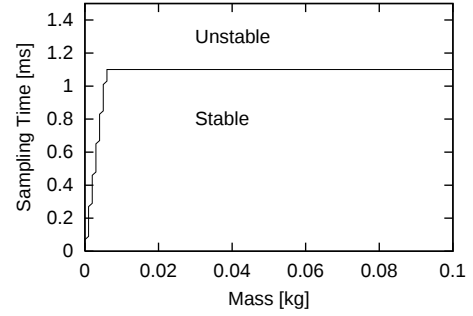


Fig.7: Critical sampling time for mass

### 3.6 安定最大制御周期と力ゲインの関係

フィードバックゲイン  $K_f$  と安定最大制御周期  $T_{max}$  の関係を Fig. 8 に示す．ここでは，パラメータとして， $m=0.11\text{ kg}$ ， $k=2000\text{ N/m}$ ， $b=1.0\text{ Ns/m}$ ， $F_d=1.1\text{ N}$  を使用した．このグラフより， $K_f < 1$  のような小さい力ゲインを設定すると， $T_{max}$  が非常に大きくなることが分かる．しかし，収束速度の関係からゲインはできるだけ大きくとることが望ましい．Fig. 8 では， $K_f > 2$  では， $T_{max}$  に大きな変化が見られない．したがって，ゲインを十分大きく設定すれば， $K_f$  は  $T_{max}$  に影響を及ぼさないと考えて差し支えない．

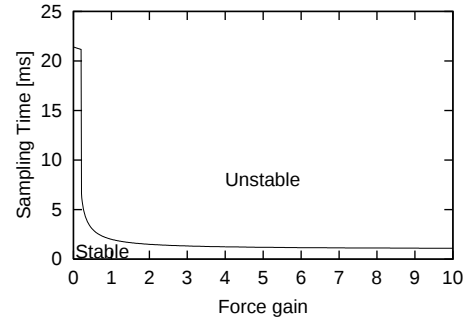


Fig.8: Critical sampling time for force feedback gain

## 4 フィードフォワード制御における安定性解析

本章では，ソフトインターフェースを介した動的制御において，フィードフォワード制御における安定性を解析する．フィードバック制御の場合と同様に，状態遷移行列  $P$  のスペクトル半径  $\rho(P)$  から安定性を判定する．フィードフォワード制御における状態遷移行列  $e^{AT}$  は，対角行列  $Q \in C^{2 \times 2}$  および対角化行列  $W \in C^{2 \times 2}$  を使って，

$$e^{AT} = W^{-1}QW \quad (12)$$

と表される．行列  $A$  の固有値  $\lambda_1$ ， $\lambda_2$  とすると，

$$Q = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 T} \end{bmatrix} \quad (13)$$

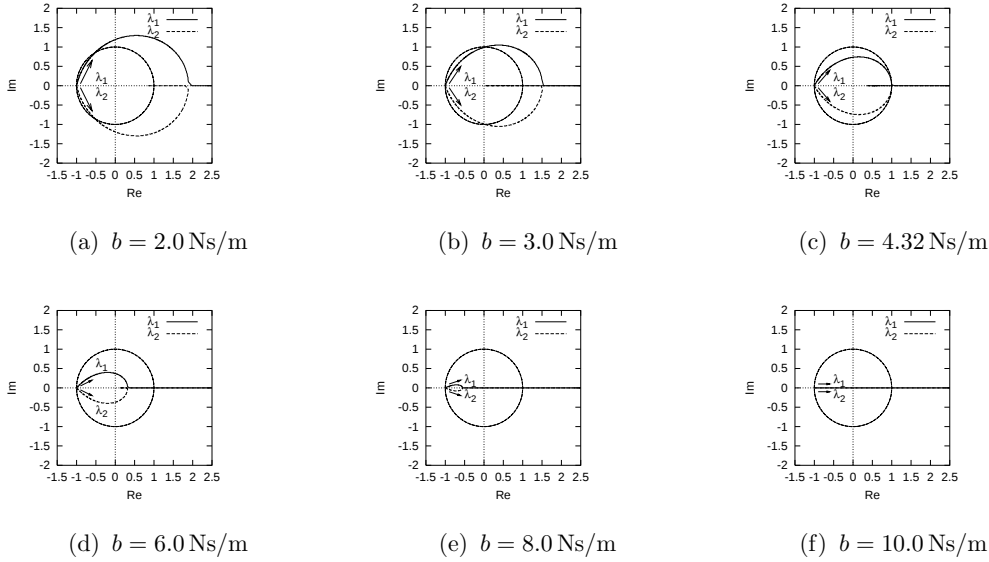


Fig.5: Root locus ( $k = 2000 \text{ N/m}$ )

と表される．また， $e^{ATn}$  は，

$$e^{ATn} = W^{-1}Q^nW \quad (14)$$

であるので，状態遷移行列  $P$  が収束行列であることは， $\rho(Q) < 1$  であることと等価となる．ここで， $K > 0$ ， $B > 0$  より， $\lambda_1, \lambda_2$  は必ず複素平面上の左半面に存在する．したがって， $|e^{\lambda_1 T}| < 1$ ， $|e^{\lambda_2 T}| < 1$  より， $\rho(Q) < 1$  が成り立つ．つまり， $n \rightarrow \infty$  のとき， $e^{ATn}$  は制御周期  $T$  によらず収束する．

## 5 通常の $z$ 変換による安定性解析

本章では，拡張  $z$  変換を用いた定式化の有効性を確認するために，ソフトインターフェースを介した動的制御の安定性を，通常の  $z$  変換を用いて解析する．これまでの結果を踏まえて，本章ではフィードバックシステムの解析結果を比較する．使用する運動方程式は，式 (1) である．ここで， $k(K_f + 1)/m = K$ ， $b(K_f + 1)/m = B$ ， $K_f F_d/m = F$  とおくと，次式を得る．

$$\ddot{x} = -B\dot{x} - Kx + F. \quad (15)$$

式 (15) から， $\dot{x}(0) = 0$ ， $\ddot{x}(0) = 0$  のとき，伝達関数  $X(s)$  は次のように表される．

$$X(s) = \frac{F}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}. \quad (16)$$

ここで， $\lambda_1, \lambda_2$  は  $X(s)$  の特性根である．特性根  $\lambda_1, \lambda_2$  を使って， $z$  領域における伝達関数  $X(z)$  は次式で表される．

$$X(z) = \frac{e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{Fz}{(z - e^{\lambda_1 T})(z - e^{\lambda_2 T})}. \quad (17)$$

ここで， $K > 0$ ， $B > 0$  から， $\lambda_1, \lambda_2$  は複素平面上の左半面に存在する．すなわち， $|e^{\lambda_1 T}| < 1$  および  $|e^{\lambda_2 T}| < 1$  であるので， $X(z)$  の極は単位円の中に存在する．したがって，このシステムは制御周期  $T$  に関係なく安定となる．この結果は拡張  $z$  変換から得られた結果とは異なる．しかし，実際のシステムが制御周期に関係なく安定であるとは考えにくい．この結果，ソフトインターフェースを介した動的制御では拡張  $z$  変換を用いて適切に表現されることが分かった．

## 6 結言

本報告では，マニピュレータと対象物の間に粘弾性体が存在する物体操作を，ソフトインターフェースを介した動的制御と名付け，その特徴である連続離散時間系からの安定性解析を行った．本論文の結論を以下に述べる．まず，線形のパネ・マス・ダンパーモデルの力制御を題材に，拡張  $z$  変換の考え方から，対象物は連続系，制御系は離散系として運動方程式を導出し，安定性を解析した．その結果，フィードバック制御を行う際に，系の安定性が物性の粘弾性特性に依存することが分かった．特に，粘性と安定最大制御周期の間の関係は単調でないことが分かった．これにより，弾性だけでなく，粘性も使用する物質の選定基準となることを示した．最後に，通常の  $z$  変換を用いて系の安定性を解析し，拡張  $z$  変換から得られた結果と比較した．その結果，連続離散時間系が適切に系を表現していることが分かった．

今後の課題としては，(1) 粘弾性特性を利用した制御則の構築，(2) 遅れを含むシステムの安定性の解析，(3) 一般化フォークトモデルへの拡張が挙げられる．連続離散時間系における解析同様，これらも，ソフトインターフェースを介した動的制御を特徴付ける関係である．

## 参考文献

- [1] M.R. Cutkosky: "Robotic Grasping and Fine Manipulation", Kluwer Academic Publishers, 1985.
- [2] R. Murray, Z. Li and S. Sastry: "A mathematical introduction to robotic manipulation", CRC Press, 1999.
- [3] S. Arimoto, P.T.A. Nguyen, H.Y. Han, and Z. Doulgeri: "Dynamics and control of a set of dual fingers with soft tips", *Robotica*, Vol. 18, No. 1, pp. 71-80, 2000.
- [4] 長瀬，中島，早川，傍島: "ソフトフィンガーを用いた対象物の把握・操りの制御"，計測自動制御学会論文集，Vol.40, No.5, pp.518-527, 2004.
- [5] K.B. Shimoga, and A.A. Goldenberg: "Soft Robotic Fingers: Part I. A Comparison of Construction Materials", *International Journal of Robotics Research*, pp. 320-334, 1996.
- [6] K.B. Shimoga, and A.A. Goldenberg: "Soft Robotic Fingers: Part II. Modeling and Impedance Regulation", *International Journal of Robotics Research*, pp. 335-350, 1996.
- [7] E.I. Jury: "SAMPLED-DATA CONTROL SYSTEMS", John Wiley & Sons, Inc., 1958.