

# 帯状物体の変形形状表現のための Fishbone モデルの提案

大阪大学 若松 栄史, 妻屋 彰, 荒井 栄司 立命館大学 平井 慎一

## Fishbone Model for Belt Object Deformation

Hidefumi WAKAMATSU, Akira TSUMAYA, and Eiji ARAI Osaka Univ.  
Shinichi HIRAI Ritsumeikan Univ.

**Abstract**— A modeling method for representing belt object deformation is proposed. Deformation of a belt object such as a flexible circuit board must be estimated for automatic manipulation and assembly. In this paper, we assume that deformation of an inextensible belt object can be described by the shape of its central axis in a longitudinal direction called the *spine line* and lines with zero curvature called *rib lines*. This model is referred to as a *fishbone model* in this paper. First, we describe deformation of a rectangular belt object using differential geometry. Next, we propose the fishbone model considering characteristics of a developable surface, i.e., a surface without expansion or contraction. Then, we formulate potential energy of the object and constraints imposed on it. Finally, we show a computational result of belt object deformation to demonstrate the feasibility of our fishbone model.

### 1. 緒言

携帯電話等の電子機器の小型化・薄型化に伴い、フレキシブル基板の需要がますます高まっている。しかし、フレキシブル基板は操作中に変形しやすく、また目標状態が特定の変形状態である場合も多いため、組付作業の自動化が困難である。このような作業の自動化のためには、フレキシブル基板の変形形状の予測が重要となる。我々は、微分幾何に基づいた線状物体の変形形状導出手法を提案し、さまざまな変形形状を計算可能であることを示した [1]。この手法は、矩形型の薄板状物体、すなわち帯状物体にも適用できると考えられる。そこで本研究では、微分幾何に基づいた帯状物体の変形形状表現のための fishbone モデルを提案する。このモデルでは、帯状物体の変形を、spine ラインと呼ぶ長手方向中心軸と、rib ラインと呼ぶ無曲率直線とで表現する。これにより、spine ライン方向の曲げ剛性が分かれば、帯状物体の変形形状を予測することができる。

### 2. 帯状物体のモデリング

本研究では、帯状物体について以下のような仮定を設ける。

- 帯状物体は矩形型の形状を持ち、その幅は長さと比較して十分に小さいものとする。
- 帯状物体は伸縮しないものとし、変形としては曲げとねじれのみを考える。

帯状物体の長さを  $U$ 、幅を  $V$  とし、物体の一端から長手方向中心軸に沿った距離を  $u$ 、中心軸からの幅方向の距離を  $v$  とする。物体上の点を  $P(u, v)$  と表す。Fig.1 に示すように、物体の中心軸上の点  $P(u, 0)$  に物体座標系  $P-\xi\eta\zeta$  を設定し、変形後の空間座標系  $O-xyz$  に対する物体座標系  $P-\xi\eta\zeta$  の向きをオイラー角  $\phi(u, 0)$ 、 $\theta(u, 0)$ 、 $\psi(u, 0)$  で表す。この時、変形後の点  $P(u, 0)$  の空間座標  $x(u, 0)$  はオイラー角を用いて表すことができる。また、 $P(u, 0)$  における物体

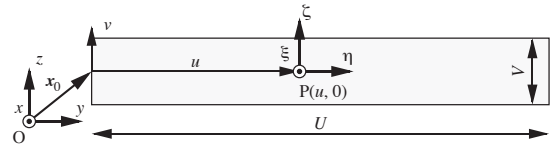


Fig.1 Coordinates of belt object

座標系各軸回りの微小回転角  $\omega_{u\xi}$ 、 $\omega_{u\eta}$ 、 $\omega_{u\zeta}$  はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} \omega_{u\xi} \\ \omega_{u\eta} \\ \omega_{u\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_\theta C_\psi \\ S_\theta S_\psi \\ C_\theta \end{bmatrix} \frac{d\phi}{du} + \begin{bmatrix} S_\psi \\ C_\psi \\ 0 \end{bmatrix} \frac{d\theta}{du} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{d\psi}{du} \quad (1)$$

となる。ここで、 $S_\theta = \sin\theta$ 、 $C_\theta = \cos\theta$  とする。次に、三次元曲面の表現手法について考察する。物体表面上の点  $P(u, v)$  における  $u$  および  $v$  方向の接線ベクトルを  $x_u(u, v)$  および  $x_v(u, v)$  とする。微分幾何により、中心軸上の点  $P(u, 0)$  における方向  $d = x_u \cos\gamma + x_v \sin\gamma$  の法曲率  $\kappa$  は次のように表される。

$$\kappa = \omega_{u\zeta} \cos^2 \gamma - 2\omega_{u\eta} \cos \gamma \sin \gamma + \delta \sin^2 \gamma \quad (2)$$

ここで、 $\delta$  を点  $P(u, 0)$  での  $v$  方向の曲率とする。この時、この曲面の曲がり具合は、以下のようなガウス曲率  $K$  および平均曲率  $H$  によって特徴づけられる。

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \omega_{u\zeta} \delta - \omega_{u\eta}^2, \quad (3)$$

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{\omega_{u\zeta} + \delta}{2} \quad (4)$$

ここで、法曲率  $\kappa$  の最大値を  $\kappa_1$ 、最小値を  $\kappa_2$  とし、その方向をそれぞれ  $d_1$  および  $d_2$  とする。帯状物体が伸縮しないという仮定から、物体の表面は可展面とみなすことができる。可展面における最小曲率  $\kappa_2$  は 0 であるため、ガウス曲率  $K$  および平均曲率  $H$  はそれぞれ

$$K = \omega_{u\zeta} \delta - \omega_{u\eta}^2 = 0, \quad 2H = \omega_{u\zeta} + \delta = \kappa_1 \quad (5)$$

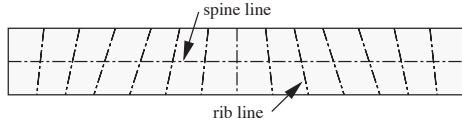


Fig.2 Fishbone model

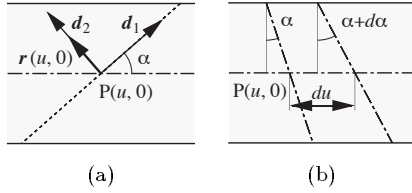


Fig.3 Rib angle and rib lines

となる．上式より， $\delta = \omega_{u\eta}^2 / \omega_{u\zeta}$  となる．よって，帯状物体の表面形状は，物体中心軸上のオイラー角  $\phi(u, 0)$ ， $\theta(u, 0)$ ， $\psi(u, 0)$  によって特徴づけられる．ここで，Fig.2のように，帯状物体の長手方向中心軸を spine ライン，最小曲率方向すなわち無曲率方向の直線を rib ラインと呼び，物体の変形形状は，spine ラインの曲げおよびねじれ変形と，rib ラインの向きによって表現できるものとする．このようなモデルを本研究では fishbone モデルと呼ぶ．Fig.3-(a) のように，点  $P(u, 0)$  において spine ラインと最大曲率方向  $d_1$  とのなす角を rib アングル  $\alpha(u, 0)$  とする．結局，帯状物体の変形形状は，長手方向中心軸上で定義される 4 つの変数  $\phi(u)$ ， $\theta(u)$ ， $\psi(u)$ ， $\alpha(u)$  によって表現できる．

### 3. 帯状物体のエネルギーと制約条件の定式化

帯状物体表面が可展面だとすると，物体は最大曲率方向  $d_1$  に曲げ変形のみを生じていると考えることができるので，ポテンシャルエネルギー  $I$  は，

$$I = \int_0^U \frac{R_f}{2 \cos \alpha} \frac{(\omega_{u\zeta}^2 + \omega_{u\eta}^2)^2}{\omega_{u\zeta}^2} du = \int_0^U \frac{R_f}{2} \frac{\omega_{u\zeta}^2}{\cos^5 \alpha} du \quad (6)$$

と表せる．ここで， $R_f$  は spine ライン方向の曲げ剛性である．次に，帯状物体が伸縮しないためには， $\xi$  軸回りの微小回転角は常に 0 である必要がある．すなわち

$$\omega_{u\xi} = 0, \quad \forall u \in [0, U] \quad (7)$$

また，Fig.3-(b) に示すように，rib ライン同士が物体上で交差しないためには，rib アングル  $\alpha$  が常に以下の不等式を満たす必要がある．

$$-\frac{2 \cos^2 \alpha}{V} \leq \frac{d\alpha}{du} \leq \frac{2 \cos^2 \alpha}{V}, \quad \forall u \in [0, U] \quad (8)$$

ここで，最大曲率方向  $d_1$  の曲率  $\kappa_1$  が平均曲率の 2 倍に等しくなることから，

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\omega_{u\eta}}{\omega_{u\zeta}} \quad (9)$$

となる．そこで， $\alpha$  の代わりに変数  $\beta = \tan \alpha$  を導入すると，式 (9)，(8) より  $\beta$  は以下のような等式および不等式を満たす必要がある．

$$\omega_{u\eta} - \omega_{u\zeta} \beta = 0, \quad \forall u \in [0, U] \quad (10)$$

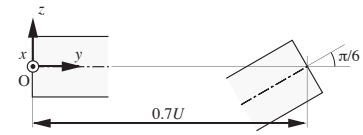
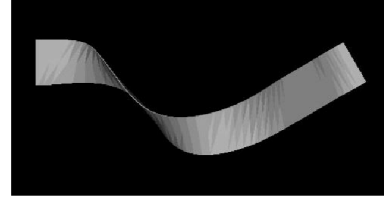
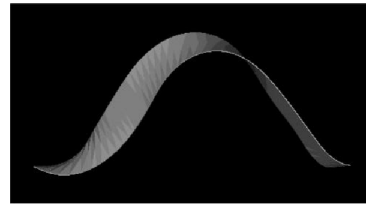


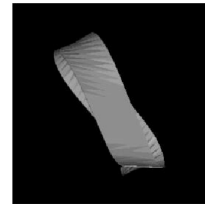
Fig.4 Example of belt object deformation



(a) Top view



(b) Front view



(c) Side view

Fig.5 Computational result

$$-\frac{2}{V} \leq \frac{d\beta}{du} \leq \frac{2}{V}, \quad \forall u \in [0, U] \quad (11)$$

したがって，物体表面が可展面であるためには，式 (7)，(10)，(11) を満たす必要がある．これらの制約式を含む幾何学的制約条件の下で，式 (6) で表されるポテンシャルエネルギー  $I$  が最小となるような  $\phi(u)$ ， $\theta(u)$ ， $\psi(u)$ ， $\beta(u)$  を求めることにより，帯状物体の変形形状を求めることができる．

### 4. 帯状物体の変形形状計算例

[1] に示す計算手法を用いて，Fig.4のような幾何学的制約が与えられた場合の帯状物体の変形形状を計算した．Fig.4では，物体両端は  $yz$  平面上にあり，点  $P(0, 0)$  と点  $P(U, 0)$  は  $y$  軸上にあるが，二点における姿勢は異なるものとする．結果をFig.5に示す．Fig.5より，本研究でのモデル化手法によって，制約条件を満たすように帯状物体が曲がりくねる様子が計算できていることが分かる．

### 5. 結言

フレキシブル基板のような帯状物体の変形形状を導出するために，fishbone モデルを提案し，計算例を示した．提案した手法では，帯状物体が等方性材料の場合，長手方向の曲げ剛性のみが分かれば計算できるため，変形形状の予測に比較的容易に適用できると考えられる．

### 参考文献

- [1] H. Wakamatsu and S. Hirai, "Static Modeling of Linear Object Deformation Based on Differential Geometry", Int. J. Robotics Research, Vol.23, No.3, pp.293-311, 2004.