応用数学 III　　試験

1．長さ L のビームの左端と右端を固定し，中点に一定の力 F を右端に向かって加える．ビームの断面積 A，ヤング率 E は一定である．ビームの自然状態において左端から距離 x の点における点の変位を $u(x)$ で表す．このとき，$u(x)$ は

$$\begin{aligned}&\min && \int_0^L \frac{1}{2}EA\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x - F\,u\left(\frac{L}{2}\right)\\ &\text{subject to} && u(0)=0, \quad u(L)=0\end{aligned}$$

から求めることができる．区間 $[0, L]$ を 6 分割し，有限要素法を用いて，上式を連立方程式に変換せよ．(15 点)

2．16 点高速フーリエ変換において，16 個の観測値を $g_0, g_1, g_2, \cdots, g_{15}$，16 個の離散フーリエ変換を $G_0, G_1, \cdots, G_{15}$ で表す．この 16 点高速フーリエ変換を計算する回路を描け．(10 点)

3．行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して，射影行列 $A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$ を求めよ．(10 点)

4．三次元空間内を質量 m の質点が運動する．質点の座標を (x, y, z) で表す．質点の位置が滑らかな曲面

$$R(x, y, z) = 0$$

上に制約される．関数 $R(x, y, z)$ の一階偏微分を

$$R_x \triangleq \frac{\partial R}{\partial x}, \quad R_y \triangleq \frac{\partial R}{\partial y}, \quad R_z \triangleq \frac{\partial R}{\partial z}$$

二階偏微分を

$$\begin{aligned}&R_{xx} \triangleq \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}, \quad R_{yy} \triangleq \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}, \quad R_{zz} \triangleq \frac{\partial^2 R}{\partial z^2},\\ &R_{xy} \triangleq \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}, \quad R_{xz} \triangleq \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}, \quad R_{yz} \triangleq \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y}\end{aligned}$$

で表す．制約力の大きさを λ で表すと，質点の運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda R_x \\ m\ddot{y} = \lambda R_y \\ m\ddot{z} = \lambda R_z \end{cases}$$

で表される．運動方程式と制約安定化の式から x，y，z，$v_x \triangleq \dot{x}$，$v_y \triangleq \dot{y}$，$v_z \triangleq \dot{z}$ に関する常微分方程式の標準形を導け．ただし，標準形に λ を含んではならない．(15 点)

5. 行列

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 12 & -6 \\ -2 & 1 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

のコレスキー分解を求めよ．(10 点)