

数値計算 試験

1. 次の行列 A に対して, $PA = LU$ を満たす下三角行列 L , 上三角行列 U , 置換行列 P を求めよ. (10 点)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 10 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. 以下の文が正しいか否かを判定し, 誤っている場合は反例 (文が成り立たない例) を示せ. (5 点 \times 2 = 10 点)

(a) 対角要素がすべて正である 3×3 の対称行列はコレスキー分解できる.

(b) $w = e^{-i2\pi/8}$ とする. 任意の整数 k に対して

$$w^0 + w^k + w^{2k} + \cdots + w^{6k} + w^{7k} = 0$$

が成り立つ.

3. 次の微分方程式を標準型に変換せよ. x, y, z, λ は時刻 t に従って変化する変数, m は定数である. (10 点)

$$m\ddot{x} = \lambda \cdot 10x$$

$$m\ddot{y} = \lambda (6y - 10z)$$

$$m\ddot{z} = \lambda (6z - 10y)$$

$$5x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 10yz = 9$$

4. 次の行列の射影行列を求めよ. (10 点)

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 定積分

$$S = \int_0^5 \frac{1}{1+x^2} dx$$

の値を, モンテカルロ法を使って求める手法を記せ. (10 点)

6. 長さ L の梁の上端と下端を固定する. 梁の断面積 A , ヤング率 E , 線密度 ρ は一定である. 梁は重力により変形する. 重力加速度を g で表す. 梁の自然状態において上端から距離 x の点における点の変位を $u(x)$ で表す. このとき関数 $u(x)$ は

$$\min \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L \{-\rho Ag u(x)\} dx$$

$$\text{subject to } u(0) = 0, \quad u(L) = 0$$

から求めることができる. 区間 $[0, L]$ を 6 分割し, 有限要素法を用いて, 上式を連立方程式に変換せよ. (10 点)