数値計算　小テスト　**1,2** 時限

1. 以下の文が正しい場合は○，誤っている場合は×を記せ．(5 点)

(a) 有限要素法における剛性行列 K は正則である．

(b) 一次元のビームの動的な伸縮変形に関する運動エネルギーを，有限要素法で近似する．このとき運動エネルギーは，節点の変位から成るベクトルの時間微分 $\dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}$ の二次形式で表される．

(c) 射影行列 P に対して，$P^{-1} = P$ が成り立つ．

(d) QR 分解において，行列 R は上三角行列である．

(e) 両端が固定されているビームの動的な変形を定式化する．ビームの運動エネルギーを T，弾性ポテンシャルエネルギーを U，外力の成す仕事を W，左端の制約を R_1，右端の制約を R_2 で表すと，ラグランジアンは未定乗数 λ_1, λ_2 を用いて

$$L = T - U + W + \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$$

と表される．

2. 三個の三角形 $\triangle P_0P_1P_3$, $\triangle P_4P_3P_1$, $\triangle P_1P_2P_4$ から構成される平面物体の弾性変形を定式化する．ラメの定数 λ に関する部分接続行列が

$$J_\lambda^{0,1,3} = J_\lambda^{4,3,1} = J_\lambda^{1,2,4} = \left[\begin{array}{rr|rr|rr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

で表されるとき，接続行列 J_λ を求めよ．(4 点)

3. 関数 $\phi_0(x), \phi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ は，区間 $[0, 1]$ で定義され

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad & \phi_1(x) &= -2x^3 + 3x^2, \\ \psi_0(x) &= x^3 - 2x^2 + x, \quad & \psi_1(x) &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．(6 点)

(a) 区間 $[3, 4]$ で $f(3) = f_3$, $f(4) = f_4$, $f'(3) = d_3$, $f'(4) = d_4$ を満たすスプライン補間 $f(x)$ を，関数 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ と f_3, f_4, d_3, d_4 を用いて表せ．

(b) 区間 $[0, 5]$ で $f(0) = f_0$, $f(5) = f_5$, $f'(0) = d_0$, $f'(5) = d_5$ を満たすスプライン補間 $f(x)$ を，関数 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ と f_0, f_5, d_0, d_5 を用いて表せ．

(c) 区間 $[3, 8]$ で $f(3) = f_3$, $f(8) = f_8$, $f'(3) = d_3$, $f'(8) = d_8$ を満たすスプライン補間 $f(x)$ を，関数 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ と f_3, f_8, d_3, d_8 を用いて表せ．

4. 以下の行列の射影行列を求めよ．(3 点)

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 定積分

$$S = \int_0^3 \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$$

の値を，モンテカルロ法を使って求める手法を記せ．(2 点)

数値計算　小テスト　3,4 時限

1. 以下の文が正しい場合は○，誤っている場合は×を記せ．(5 点)

(a) 有限要素法における慣性行列 M は正則である．

(b) QR 分解において，行列 Q は直交行列である．

(c) 一次元のビームの動的な伸縮変形に関する運動エネルギーを，有限要素法で近似する．このとき運動エネルギーは，節点の変位から成るベクトル $\boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}$ の二次形式で表される．

(d) 射影行列 P に対して，$P^2 = P$ が成り立つ．

(e) 両端が固定されているビームの動的な変形を定式化する．ビームの運動エネルギーを T，弾性ポテンシャルエネルギーを U，外力の成す仕事を W，左端の制約を R_1，右端の制約を R_2 で表すと，ラグランジアンは未定乗数 λ を用いて

$$L = T - U + W + \lambda R_1 + \lambda R_2$$

と表される．

2. 以下の行列の射影行列を求めよ．(3 点)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 三個の三角形 $\triangle P_0P_1P_2$, $\triangle P_3P_2P_1$, $\triangle P_2P_3P_4$ から構成される平面物体の弾性変形を定式化する．ラメの定数 λ に関する部分接続行列が

$$J_\lambda^{0,1,2} = J_\lambda^{3,2,1} = J_\lambda^{2,3,4} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

で表されるとき，接続行列 J_λ を求めよ．(4 点)

4. 関数 $\phi_0(x), \phi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ は，区間 $[0, 1]$ で定義され

$$\phi_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad \phi_1(x) = -2x^3 + 3x^2,$$
$$\psi_0(x) = x^3 - 2x^2 + x, \quad \psi_1(x) = x^3 - x^2$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．(6 点)

(a) 区間 $[2, 3]$ で $f(2) = f_2$, $f(3) = f_3$, $f'(2) = d_2$, $f'(3) = d_3$ を満たすスプライン補間 $f(x)$ を，関数 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ と f_2, f_3, d_2, d_3 を用いて表せ．

(b) 区間 $[0, 5]$ で $f(0) = f_0$, $f(5) = f_5$, $f'(0) = d_0$, $f'(5) = d_5$ を満たすスプライン補間 $f(x)$ を，関数 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ と f_0, f_5, d_0, d_5 を用いて表せ．

(c) 区間 $[2, 7]$ で $f(2) = f_2$, $f(7) = f_7$, $f'(2) = d_2$, $f'(7) = d_7$ を満たすスプライン補間 $f(x)$ を，関数 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ と f_2, f_7, d_2, d_7 を用いて表せ．

5. 定積分

$$S = \int_0^4 \frac{1}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x$$

の値を，モンテカルロ法を使って求める手法を記せ．(2 点)