1．以下の時間 t に関する常微分方程式の標準形を記せ．記号 $\dot{}$ は時間 t に関する一階微分，$\ddot{}$ は二階微分を表す.（16 点）

(a) $\ddot{x} + 2\dot{x}^3 + 6x = 5\sin 4t$　　(b) $\dot{z} + 2z + 3\displaystyle\int_0^t z(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$

(c) $\begin{cases} \ddot{x} + (1 - x^2 - y^2)x = 0 \\ \ddot{y} + (1 - x^2 - y^2)y = 0 \end{cases}$　　(d) $\ddot{p} + 3p = 2e^{-4t}$

2．変数 $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対応する x の値が $x_1, .x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ で与えられる．変数 t と x の関係を二次式 $x = a + bt + ct^2$ で近似する．係数 a, b, c の値を計算する正規方程式を記せ.（5 点）

3．次の行列の射影行列を求めよ．(5 点)

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4．区間 (0, 1) の一様乱数を生成する関数 rand を用いて，以下の乱数を生成する式を示せ．(6 点)

(a) 区間 (2, 3) の一様乱数 $U(2, 3)$
(b) 区間 (2, 7) の一様乱数 $U(2, 7)$
(c) 二次元領域 $1 < x < 2,\ 0 < y < 4$ 内に一様に分布する点 (x, y)

5．長さ L の梁の上端と下端を固定する．梁の断面積 A，ヤング率 E，線密度 ρ は一定である．梁は重力により変形する．重力加速度を g で表す．梁の自然状態において上端から距離 x の点における点の変位を $u(x)$ で表す．このとき関数 $u(x)$ は

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\int_0^L \frac{1}{2}EA\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^L \{-\rho A g\, u(x)\}\ \mathrm{d}x \\ \text{subject to} & u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \end{array}$$

から求めることができる．区間 $[\,0,\,L\,]$ を 4 分割し，$h = L/4$ とする．有限要素法を用いて，上式を連立一次方程式に変換せよ．(10 点)

6．ピボット選択型 LU 分解を用いて，5 次の正方行列

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -6 & 2 \\ 1 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

の LU 分解を，4 次の正方行列 A_4 の LU 分解に変換する．行列 A_5 の一列目で，絶対値が最大の要素をピボットに選び，それにしたがって行を交換した結果を行列 A_5' で表す．行列 A_5' の LU 分解 $A_5' = L_5U_5$ において，L_5 の対角要素の値を 1 とする．以下の問いに答えよ．(8 点)

(a) 行交換後の行列 A_5' を示せ.
(b) 下三角行列 L_5 の一列目を，列ベクトルの形で示せ.
(c) 上三角行列 U_5 の一行目を，行ベクトルの形で示せ.
(d) 4 次の正方行列 A_4 を示せ.