

知能科学：最適化

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

講義の流れ

- 1 線形計画法
- 2 線形同次不等式
- 3 非線形最適化（制約なし）
- 4 非線形最適化（制約付き）
- 5 まとめ

線形計画法

- 製品 A, B を二つの材料 P, Q から製造する.
- 材料 P が 15 Kg, Q が 24 Kg ある.
- 製品 A を 1 Kg 製造するために, P が 3 Kg, Q が 2 Kg 必要である.
- 製品 B を 1 Kg 製造するために, P が 1 Kg, Q が 3 Kg 必要である.
- 製品 A の価格は 1 Kg で 1 万円, 製品 B の価格は 1 Kg で 1 万円である.



売上を最大にするためには, 製品 A, B をどれだけ製造すればよいか.

線形計画法

製品 A を x_1 Kg, 製品 B を x_2 Kg 製造する.

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

材料 P が 15 Kg あるので

$$3x_1 + 1x_2 \leq 15$$

材料 Q が 24 Kg あるので

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

売上 (単位 : 万円)

$$y = 1x_1 + 1x_2$$

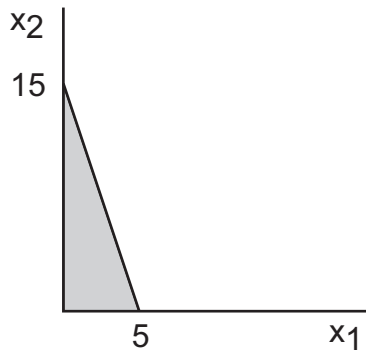
線形計画法

線形計画問題 (linear programming; LP)

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & y = x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0\end{array}$$

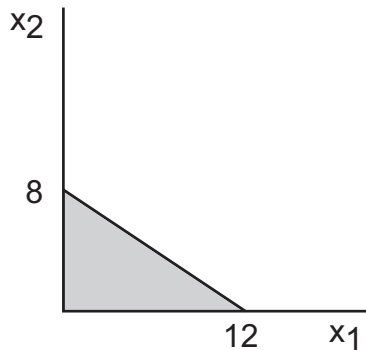
目的関数，制約式がすべて線形

線形計画法



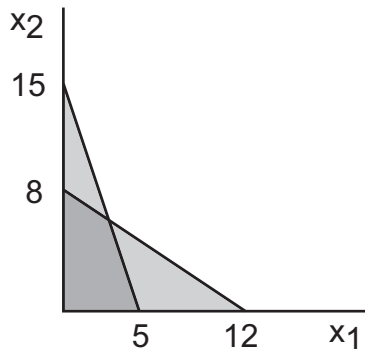
$$3x_1 + x_2 \leq 15$$

線形計画法



$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

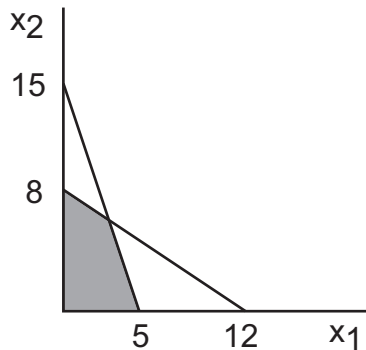
線形計画法



$$3x_1 + x_2 \leq 15$$

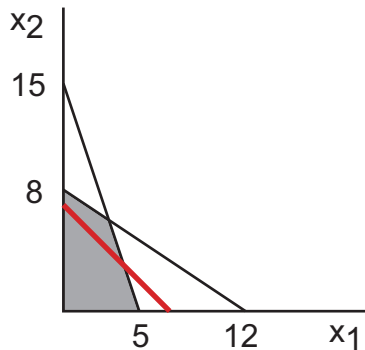
$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

線形計画法



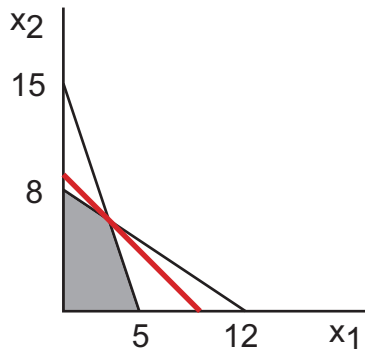
実行可能解 (feasible solution)

線形計画法



$$x_1 + x_2 = 7$$

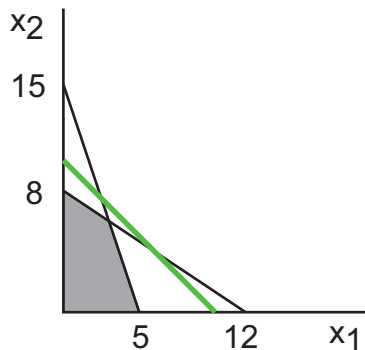
線形計画法



$$x_1 + x_2 = 9$$

最大値 ($x_1 = 3, x_2 = 6$)

線形計画法



$$x_1 + x_2 = 10$$

実行可能ではない

線形計画問題

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & \mathbf{f}^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\end{array}$$



$$\mathbf{x} = \text{linprog}(\mathbf{f}, \mathbf{A}, \mathbf{b})$$

Optimization Toolbox が必要
最小化 (minimize) であることに注意
 $\text{maximize } f \implies \text{minimize } -f$

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & y = -x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0\end{array}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB

```
f = [ -1; -1 ];  
A = [ 3, 1;  
      2, 3;  
      -1, 0;  
      0, -1 ];  
b = [ 15; 24; 0; 0 ];  
x = linprog(f, A, b);  
x
```

MATLAB

実行結果

```
>> linprog_2D
```

```
Optimal solution found.
```

```
x =
```

```
3.0000
```

```
6.0000
```


実行可能性

条件式を満たす変数の値が存在しないとき

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & y = x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & -x_1 - x_2 \leq -10 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0\end{array}$$

実行可能性

```
f = [ -1; -1 ];  
A = [ 3,  1;  
      2,  3;  
     -1, -1;  
     -1,  0;  
      0, -1 ];  
b = [ 15; 24; -10; 0; 0 ];  
x = linprog(f, A, b);  
x
```

実行可能性

実行結果

```
>> example_non_feasible
```

```
No feasible solution found.
```

```
Linprog stopped because no point satisfies the constraint
```

```
x =
```

```
[]
```

線形同次不等式

線形同次不等式

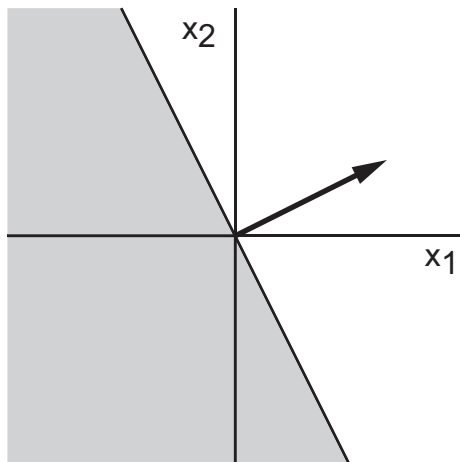
$$2x_1 + x_2 \leq 0$$

$$-2x_1 + 2x_2 \leq 0$$

$$2x_2 \leq 0$$

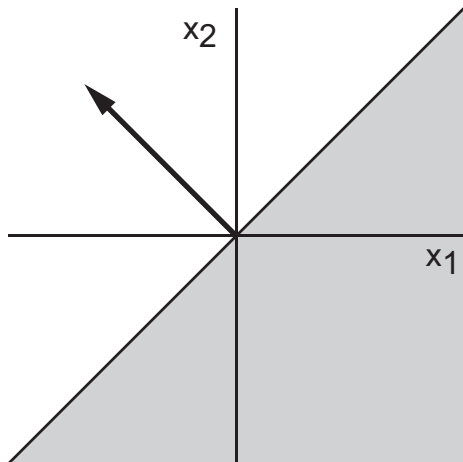
を満たす $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$ (ただし $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) が存在するか.
(この解を同次解とよぶ)

線形同次不等式



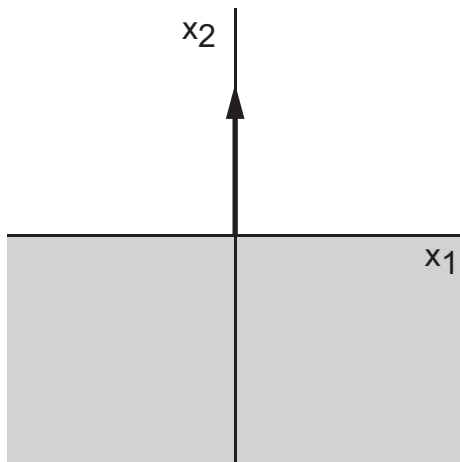
$$2x_1 + x_2 \leq 0$$

線形同次不等式



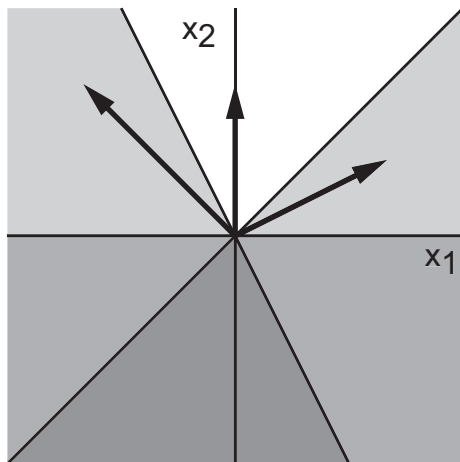
$$-2x_1 + 2x_2 \leq 0$$

線形同次不等式



$$2x_2 \leq 0$$

線形同次不等式



0 以外の解（同次解）が存在する。

線形同次不等式

線形同次不等式

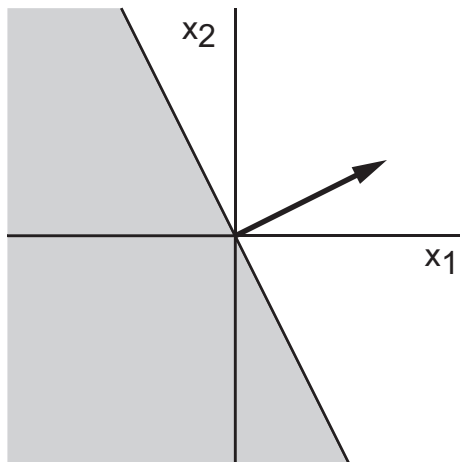
$$2x_1 + x_2 \leq 0$$

$$-2x_1 + 2x_2 \leq 0$$

$$-2x_2 \leq 0$$

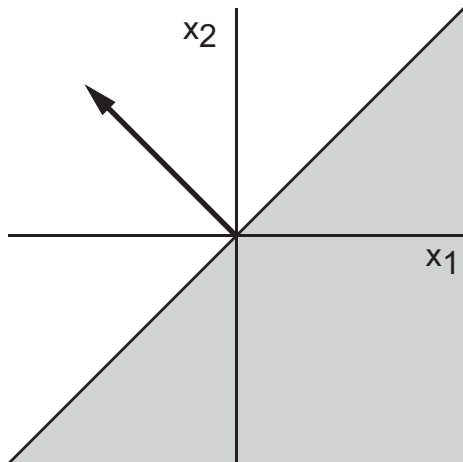
を満たす $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ (ただし $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) が存在するか.

線形同次不等式



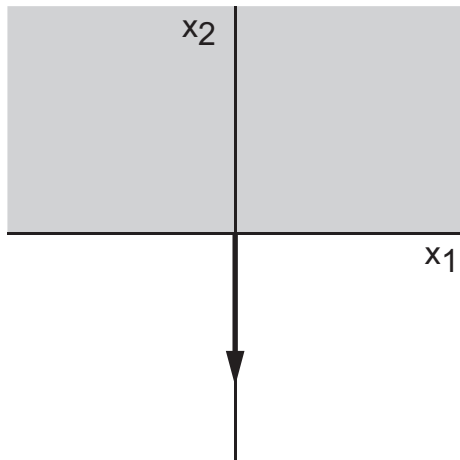
$$2x_1 + x_2 \leq 0$$

線形同次不等式



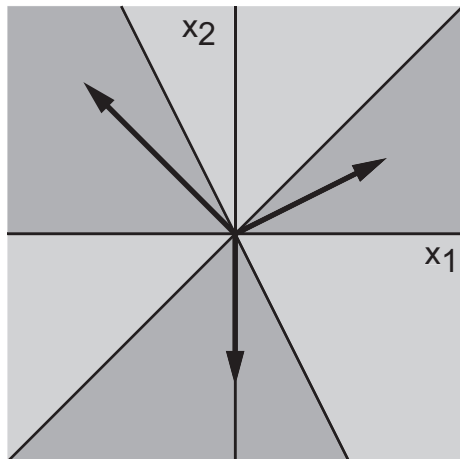
$$-2x_1 + 2x_2 \leq 0$$

線形同次不等式



$$-2x_2 \leq 0$$

線形同次不等式



0 以外の解（同次解）は存在しない.

線形同次不等式

線形同次不等式

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &\leq 0 \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 0 \\ -2x_2 &\leq 0\end{aligned}$$

の解は

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

に限られる.

判定法

線形同次不等式

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

を満たす $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するか否かを判定

Step 1

連立一次方程式

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

を満たす $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在するか否かを調べる.

存在するときは, 線形同次不等式を満たす $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在すると判定し, 終了.

存在しないときは Step 2 へ.

判定法

Step 2

線形計画問題

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & y = \sum \lambda_i \\ \text{subject to} & \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} + \lambda_i \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \\ & \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots)\end{array}$$

を解く.

y の最大値が正ならば線形同次不等式を満たす $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在すると判定し, 0 ならば存在しないと判定する.

判定法

Step 2 において，同次解が存在する

⇓ ⇓

$\mathbf{a}_k^\top \mathbf{x} > 0$ となる条件式がある．このとき $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

⇓ ⇓

$$\lambda_k > 0$$

⇓ ⇓

$$y > 0$$

判定法

Step 2 において、同次解が存在しない

⇕

$$\mathbf{a}_1^\top \mathbf{x} = 0, \mathbf{a}_2^\top \mathbf{x} = 0, \dots$$

⇕

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots$$

⇕

$$y = 0$$

判定法

Step 2 において

$$\begin{aligned}y > 0 &\implies \exists k, \lambda_k > 0 \implies \mathbf{a}_k^\top \mathbf{x} < 0 \\&\implies \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\&\implies \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

Step 2 において $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$ の解は $\mathbf{0}$ のみ

$$\begin{aligned}\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \\ \implies \exists k, \mathbf{a}_k^\top \mathbf{x} < 0 \implies \exists \lambda_k > 0 \implies y > 0\end{aligned}$$

\Downarrow

Step 2 において

$$y > 0 \equiv \exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

判定法

Step 2 における不等式は同次式

(\mathbf{x}, λ) が解 $\implies (\alpha \mathbf{x}, \alpha \lambda)$ が解 ($\alpha > 0$)



解がある場合, y は ∞ に発散する.



発散を防ぐために, 条件式

$$\sum \lambda_i \leq 1$$

を追加 (追加しても解が存在するか否かは変わらない)

判定法

線形同次不等式

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 \leq 0$$

$$-2x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 0$$

を満たす $x \neq 0$ が存在するか.



$$\text{maximize } y = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\text{subject to } 2x_1 + x_2 - 5x_3 + \lambda_1 \leq 0$$

$$-2x_1 - x_2 + 5x_3 + \lambda_2 \leq 0$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$$



判定法

最小化問題

$$\text{minimize } y = -\lambda_1 - \lambda_2$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } \quad & 2x_1 + x_2 - 5x_3 + \lambda_1 \leq 0 \\ & -2x_1 - x_2 + 5x_3 + \lambda_2 \leq 0 \\ & -\lambda_1 \leq 0 \\ & -\lambda_2 \leq 0 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \end{aligned}$$

変数ベクトル

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

判定法

⇓

$$\text{minimize } y = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \mathbf{q}$$

subject to

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -5 & 1 & \\ -2 & -1 & 5 & & 1 \\ \hline & & & -1 & \\ & & & & -1 \\ \hline & & & 1 & 1 \end{array} \right] \mathbf{q} \leq \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \right]$$

non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```
function stat=non_zero_sol_homogeneous_ineqs(A)
    N = null(A);  sz = size(N);
    if (sz(2) > 0)
        stat = 1;
        return;
    end

    sz = size(A);
    m = sz(1); % number of inequalities
    n = sz(2); % dimension
    I = eye(m);
```


non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```
C = [ A, I;  
      zeros(m,n), -I;  
      zeros(1,n), ones(1,m) ];  
b = [ zeros(m,1); zeros(m,1); 1 ];  
f = [ zeros(n,1); -ones(m,1) ];  
x = linprog(f, C, b);  
if (f'*x < 0)  
    stat = 1;  
else  
    stat = 0;  
end  
end
```

non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```
>> A
```

```
A =
```

```
    2    1  
   -2    2  
    0    2
```

```
>> non_zero_sol_homogeneous_ineqs(A)
```

```
Optimal solution found.
```

```
ans =
```

```
1
```

non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```
>> A
```

```
A =
```

```
    2    1  
   -2    2  
    0   -2
```

```
>> non_zero_sol_homogeneous_ineqs(A)
```

```
Optimal solution found.
```

```
ans =
```

```
0
```

non_zero_sol_homogeneous_ineqs.m

```
>> A
```

```
A =
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>> non_zero_sol_homogeneous_ineqs(A)
```

```
ans =
```

```
1
```

双対問題

線形同次不等式

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

の解は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のみである.

|||

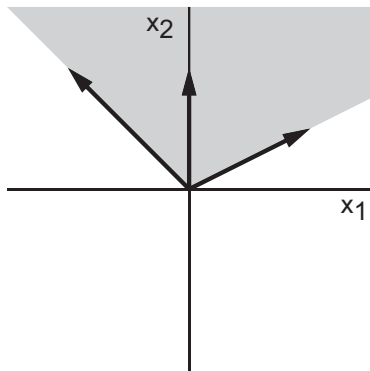
ベクトル

$$\mathbf{x} = \sum_i c_i \mathbf{a}_i \quad (c_1, c_2, \dots \geq 0)$$

が全空間をカバーする.

双対問題

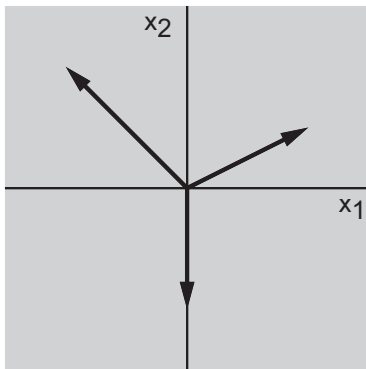
$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$



\mathbf{x} は全空間をカバーしない.

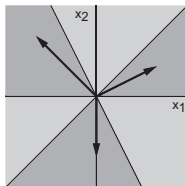
双対問題

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$



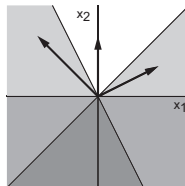
\mathbf{x} は全空間をカバーする.

双対問題



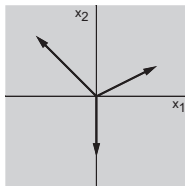
解は **0** のみ

|||

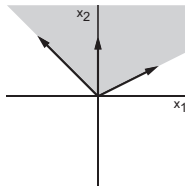


0 以外の解

|||



全空間をカバー



カバーしない

非線形最適化

非線形最適化

目的関数あるいは制約式が線形でない最適化

- 制約なし非線形最適化
- 制約付き非線形最適化

一変数関数の最小化

区間 $[-\pi, \pi]$ で関数 $\cos x$ の最小値を求める.

```
x = fminbnd(@cos, -pi, pi);
```

```
x
```

```
x =
```

```
-3.1415
```

一変数関数の最小化

区間 $[-10, 10]$ で関数 $f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x$ の最小値を求める.

```
f = @(x) x.^4 - 3*x.^3 - 4*x;
```

```
x = fminbnd(f, -10, 10);
```

```
x
```

```
x =
```

```
2.4207
```

```
x=-2:0.01:4;
```

```
plot(x,f(x));
```

非線形最適化

ローゼンブロッック関数 (Rosenbrock function)

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

の最小値を数値的に求める.

ローゼンブロッック関数を記述
ファイル Rosenbrock.m に保存

```
function f = Rosenbrock( x )  
    x1 = x(1); x2 = x(2);  
    f = 100*(x2 - x1^2)^2 + (1 - x1)^2;  
end
```

MATLAB

ファイル Rosenbrock_minimize.m

```
xinit = [ -1.2; 1.0 ]; % initial value
[xmin, fmin] = fminsearch(@Rosenbrock, xinit);
xmin
fmin
```

変数の初期値： $[x_1, x_2]^T = [-1.2, 1.0]^T$

MATLAB

実行結果

```
>> Rosenbrock_minimize
```

```
xmin =
```

```
1.0000
```

```
1.0000
```

```
fmin =
```

```
8.1777e-10
```

計算過程を表示する

```
xinit = [ -1.2; 1.0 ]; % initial value
options = optimset('Display','iter');
[xmin, fmin] = fminsearch(@Rosenbrock, xinit, options);
xmin
fmin
```


MATLAB

Iteration	Func-count	min f(x)	Procedure
0	1	24.2	
1	3	20.05	initial simp
2	5	5.1618	expand
3	7	4.4978	reflect
4	9	4.4978	contract out
5	11	4.38136	contract ins
6	13	4.24527	contract ins
7	15	4.21762	reflect
8	17	4.21129	contract ins
9	19	4.13556	expand
10	21	4.13556	contract ins
11	23	4.01273	expand
12	25	3.93738	expand
13	27	3.60261	expand
14	28	3.60261	reflect

MATLAB

83	155	1.12293e-09	contract ins
84	157	1.10755e-09	contract out
85	159	8.17766e-10	contract ins

最適化が終了しました:

現在の x は $1.000000e-04$ の `OPTIONS.TolX` を使って終了基準を満たし、 $F(x)$ は $1.000000e-04$ の `OPTIONS.TolFun` を使って収束基準を満たします。

```
xmin =  
    1.0000  
    1.0000  
  
fmin =  
    8.1777e-10
```

制約付き非線形最適化

体積が一定で表面積が最小の直方体を求める.

体積 : 5^3

直方体の三辺の長さ : x, y, z

$$\text{minimize } S(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } & xyz - 5^3 = 0 \\ & x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

MATLAB

不等式制約 $-x \leq 0, -y \leq 0, -z \leq 0$

等式制約 $xyz - 5^3 = 0$

```
function [ ineq, cond ] = nonlcon( q )
```

```
% 制約条件
```

```
    x = q(1); y = q(2); z = q(3);
```

```
    ineq = [-x; -y; -z];
```

```
    cond = [ x*y*z - 5^3 ];
```

```
end
```

ファイル `nonlcon.m` に保存

MATLAB

ファイル `area_minimize_under_nonlcon.m`

```
qinit = [1;1;1];  
[qmin,smin] = fmincon(@area, qinit, ...  
                    [], [], [], [], [], @nonlcon);  
  
qmin  
smin
```

Optimization Toolbox が必要

MATLAB

実行結果

```
>> rectangular_min_area_with_constant_volume
```

制約を満たす局所的最小値が見つかりました。

目的関数が最適性の許容誤差値の範囲内の実行可能な方向において非減少であり、制約が制約の許容誤差値の範囲内で満たされているため、最適化は完了しました。

<停止条件の詳細>

```
qmin =  
    5.0000  
    5.0000  
    5.0000  
smin =  
   150.0000
```

まとめ

線形計画問題

線形目的関数と線形制約（等式，不等式）

linprog

線形同次不等式

非零の解があるか否かを判定

線形計画問題に帰着

双対問題

非線形最適化

fminsearch

制約付き最適化 fmincon

レポート

下記の問題に答え、pdf ファイルで moodle+R に提出する.

ファイル名：学籍番号（11桁半角数字）名前（空白なし）.pdf
期限 12月29日（月曜）午前1時

- (1) 三角形 ABC の周囲長が 3 cm であり、BC と CA の比が 2 : 1 である．面積が最大になる三角形の各辺の長さ、面積の値を、MATLAB を用いて求めよ．プログラムと実行結果を示すこと．
- (2) 四角形 ABCD の周囲長が 4 cm であり、AB と BC の比が 2 : 1 である．面積が最大になる四角形の各辺の長さ、面積の値を、MATLAB を用いて求めよ．プログラムと実行結果を示すこと．

レポート

(1) 一辺の長さが a, b, c で与えられる三角形の面積 S は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

で与えられる.

fmincon は関数の最小値を求める. 最大値を求めるときは, 目的関数 f の逆 $-f$ の最小値を計算すれば良い.

maximize f

⇓

minimize $g = -f$

(2) 四角形の辺の長さと, 対角線 AC の長さを変数とする.