知能科学：確率的手法

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

講義の流れ

1. 乱数
2. モンテカルロ法
3. 移動ロボットの経路計画
4. まとめ

乱数

コンピュータ上でサイコロを模擬する.

$$D = \begin{cases} 1 & X \in (\quad 0, 1/6\,) \\ 2 & X \in [1/6, 2/6\,) \\ 3 & X \in [2/6, 3/6\,) \\ 4 & X \in [3/6, 4/6\,) \\ 5 & X \in [4/6, 5/6\,) \\ 6 & X \in [5/6, \quad 1\,) \end{cases}$$

X は区間 $(\,0,\,1\,)$ 内の一様乱数

$$X \sim U(0,1)$$

一様乱数 $U(0,1)$

関数 rand　　区間 (0, 1) 内の一様乱数

プログラム uniform.m

```
for i=1:10
    x = rand;
    s = num2str(x);
    disp(s);
end
```

uniform.m

```
>> uniform
0.81472
0.90579
0.12699
0.91338
0.63236
0.09754
0.2785
0.54688
0.95751
0.96489
>> uniform
0.15761
0.97059
0.95717
0.48538
```

dice.m

サイコロのシミュレーション

```
function k = dice()
% サイコロのシミュレーション
    x = rand;
    if x < 1/6.00          k = 1;
    elseif x < 2/6.00      k = 2;
    elseif x < 3/6.00      k = 3;
    elseif x < 4/6.00      k = 4;
    elseif x < 5/6.00      k = 5;
    else                   k = 6;
    end
end
```

dice_run.m

サイコロを 100 回振る

```
for i=1:10
    s = '';
    for j=1:10
        k = dice();
        s = strcat(s, num2str(k), ',');
    end
    s = replace(s, ',', ' ');
    disp(s)
end
```

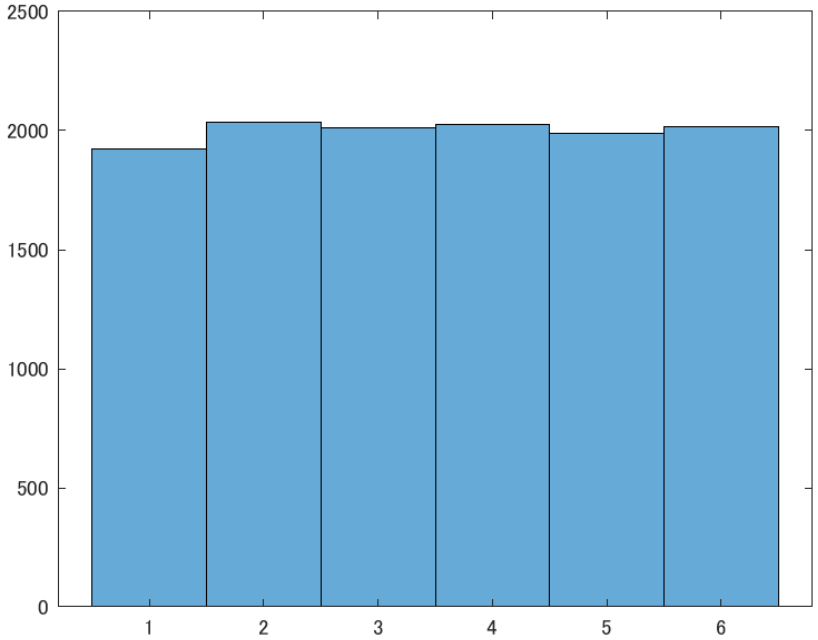
dice_run.m

```
>> dice_run
5  6  4  4  5  6  2  4  2  2
2  6  2  4  5  2  3  6  1  5
6  2  5  6  1  6  6  6  2  3
6  6  5  1  1  3  2  4  1  4
3  4  1  4  4  2  3  4  4  1
5  1  3  2  6  1  5  3  1  4
2  1  1  1  6  5  2  2  1  4
5  2  5  5  6  2  6  6  1  5
1  1  6  6  5  1  2  4  2  5
2  3  2  6  2  4  5  6  1  3
>> dice_run
5  5  2  1  2  4  2  6  5  3
3  4  2  2  6  3  4  2  5  1
6  5  6  4  5  4  6  5  2  5
2  6  6  5  2  5  1  1  6  3
```

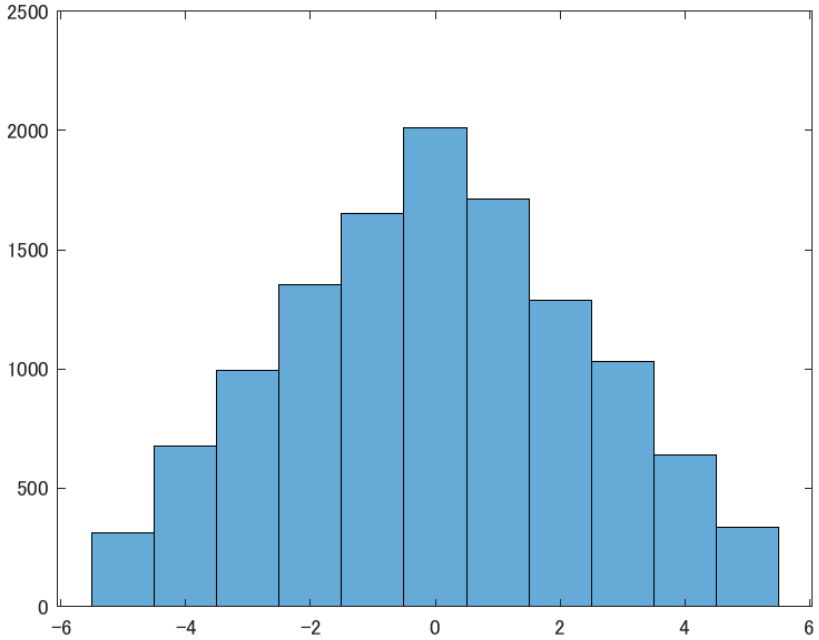
dice_validation.m

```
n = 12000;

for k=1:n
    a(k) = dice();
end

histogram(a);
fprintf("サイコロの目の頻度\n");
fprintf("一時停止：何かのキーを押してください\n");
pause;

d = a(2:n) - a(1:n-1);
histogram(d);
fprintf("差の頻度\n");
fprintf("一時停止：何かのキーを押してください\n");
pause;
```

dice_validation.m



ヒストグラム

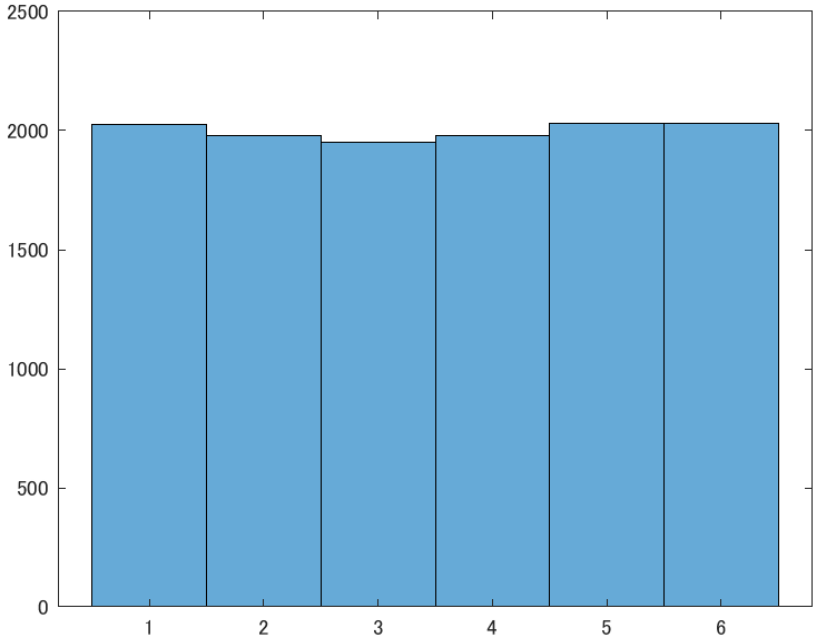


差のヒストグラム

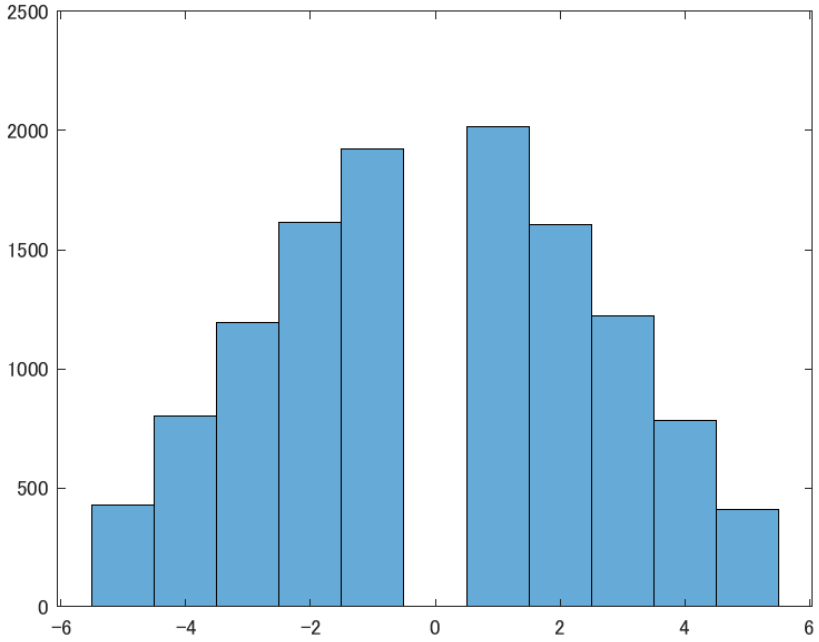
dice_false_run.m

```
>> dice_false_run
3 2 5 3 4 5 1 5 6 5
2 5 3 6 4 3 4 3 5 6
3 6 3 4 2 1 2 4 3 4
6 4 2 5 4 3 4 2 3 1
2 6 3 2 5 6 1 3 1 6
5 6 5 2 4 5 4 5 3 5
2 4 1 2 1 4 6 3 4 3
5 6 5 1 6 1 4 6 4 6
2 6 2 1 4 2 4 3 4 3
4 3 5 3 5 1 2 1 2 6
>> dice_false_run
4 1 6 4 2 3 6 5 2 1
6 2 3 1 4 6 5 3 2 3
5 1 3 1 2 6 4 2 1 4
1 4 3 4 5 2 3 4 1 6
```

dice_false_validation.m



ヒストグラム



差のヒストグラム

一様乱数 $U(a, b)$

$U(a, b)$

区間 (a, b) 内の一様乱数

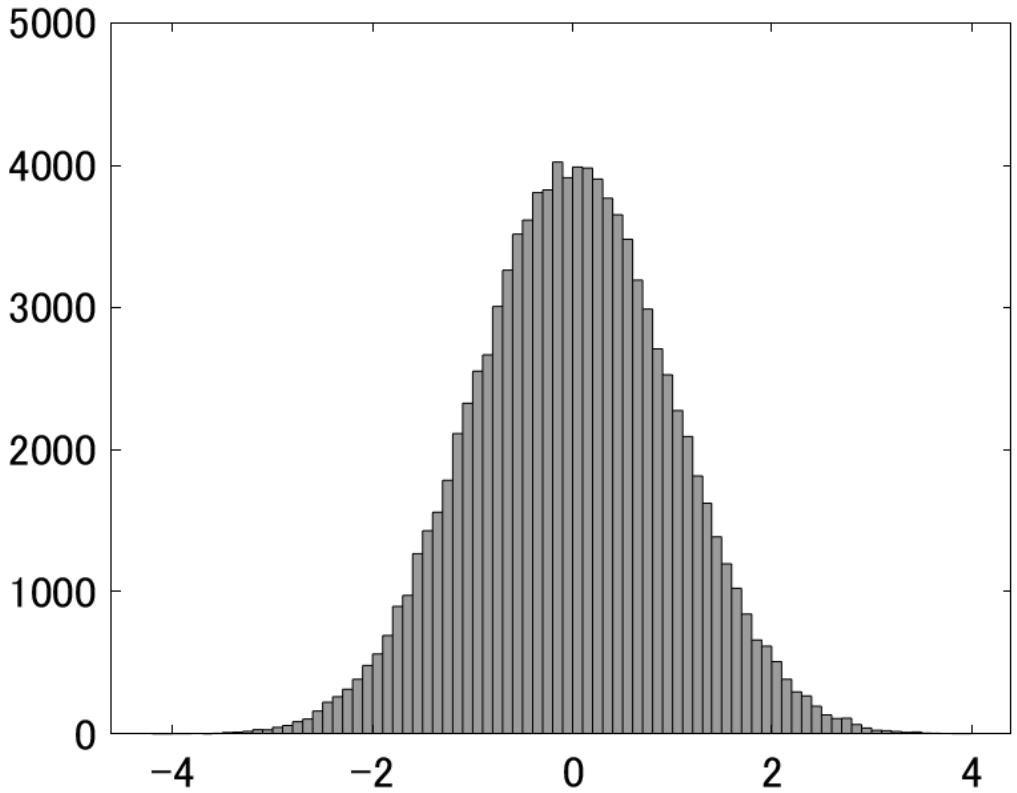
$$X \sim U(0, 1)$$
$$Y \sim U(a, b)$$

$$Y = (b - a)X + a$$

正規乱数 $N(0,1)$

関数 `randn`　　平均 0，標準偏差 1 の正規乱数

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



正規乱数 $N(\mu, \sigma)$

$N(\mu, \sigma)$

平均 μ，標準偏差 σ (分散 σ^2) の正規分布に従う乱数

$$X \sim N(0, 1)$$
$$Y \sim N(\mu, \sigma)$$

$$Y = \sigma X + \mu$$

モンテカルロ法

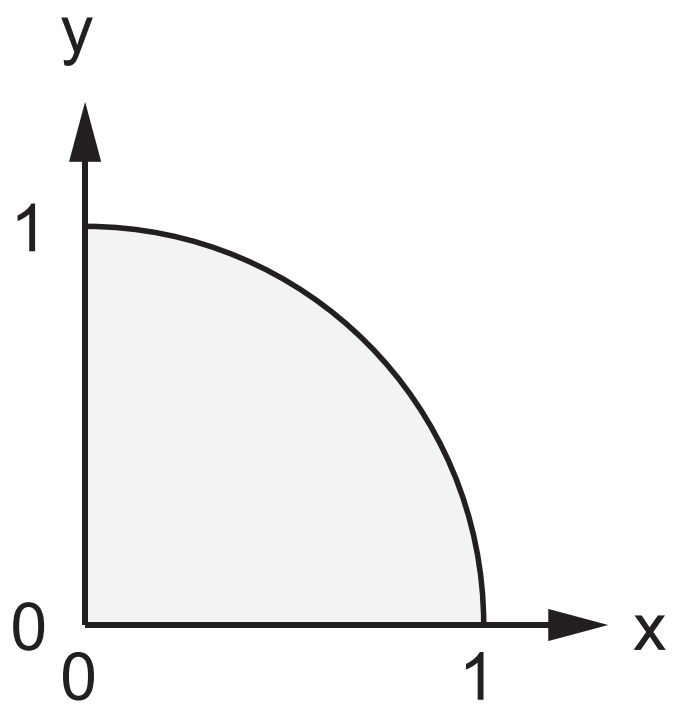
計算に時間や手間を要する問題を，乱数を用いて近似的に解く手法

定積分の計算

定積分

$$S_1 = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

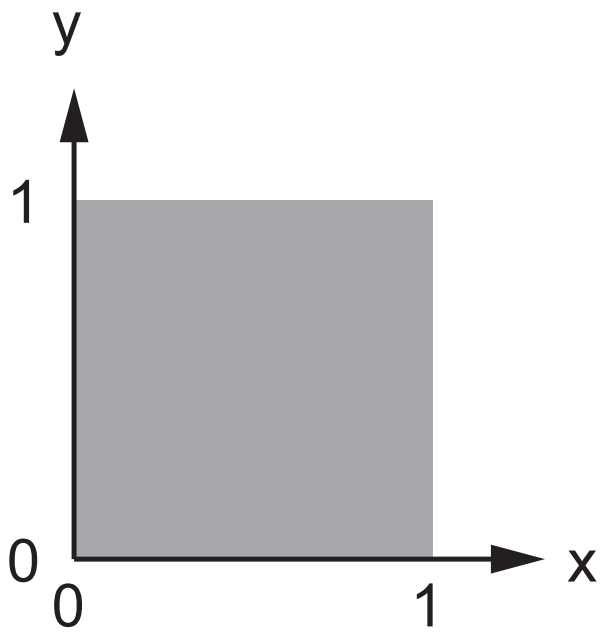
被積分関数　$y = \sqrt{1 - x^2}$

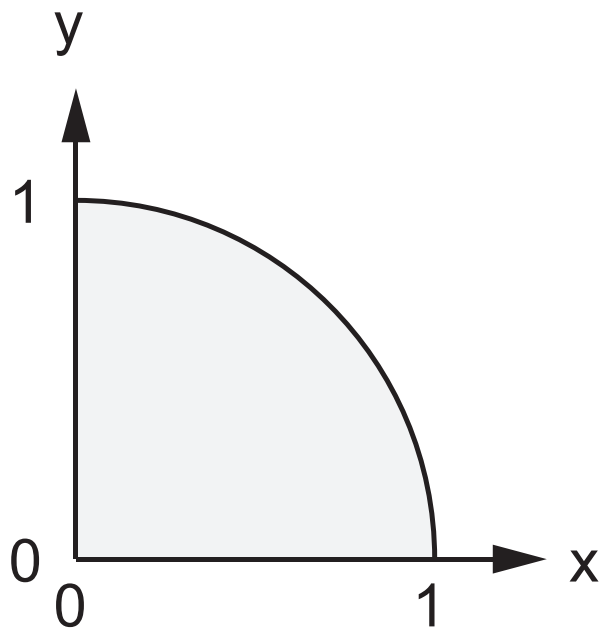


定積分の計算

$x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1]$
点 (x, y) を正方形領域内でランダムに発生させる.

$$x \sim U(0, 1), \quad y \sim U(0, 1)$$





N：発生させた点の個数　M：$y \leq \sqrt{1 - x^2}$ を満たす点の個数

定積分の計算

点の個数は，面積に比例すると仮定
正方形領域の面積：1

$$N : M = 1 : S_1$$

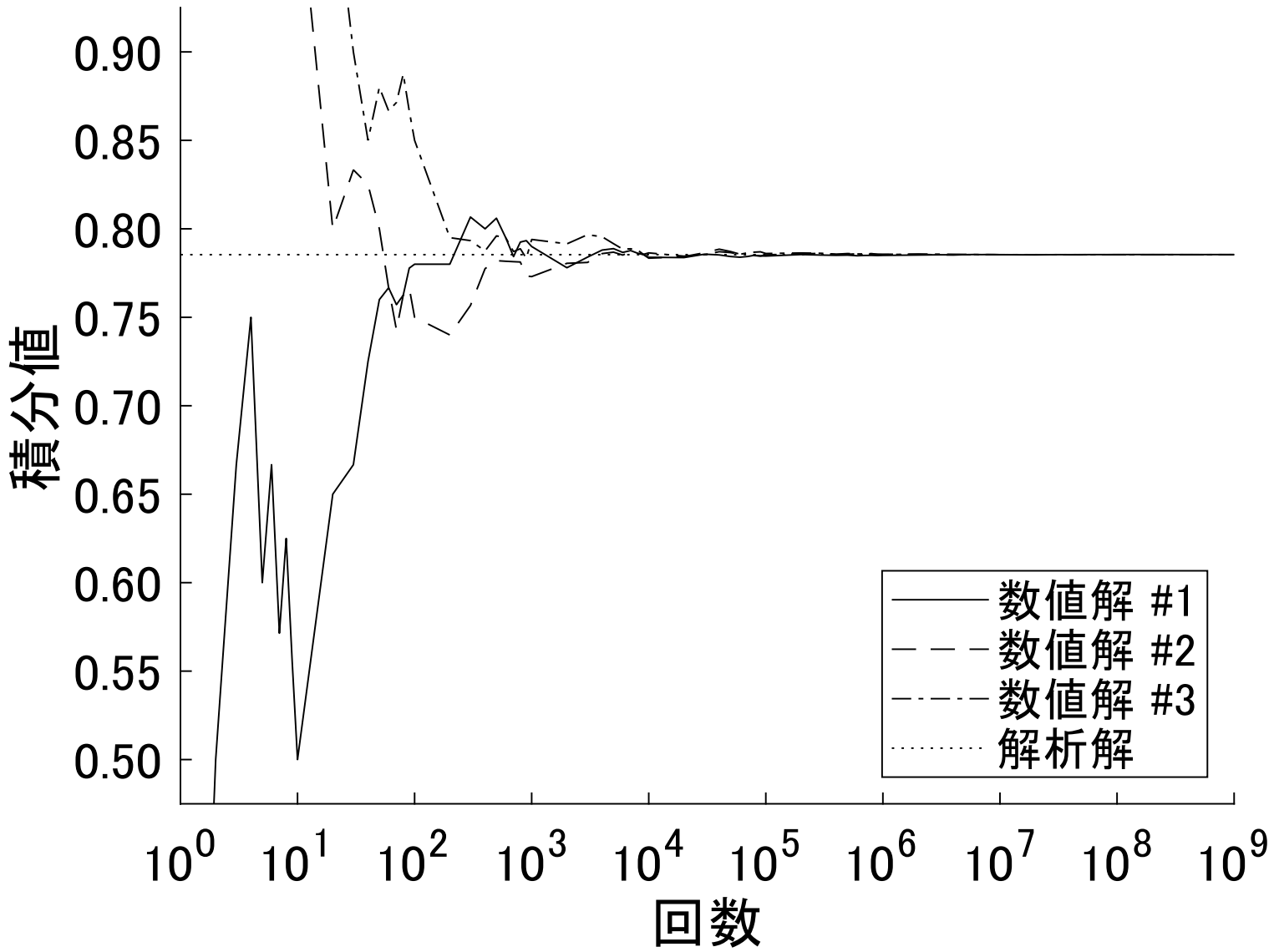
$$\Downarrow$$

$$S_1 = \frac{M}{N}$$

integral_S1.m

```
N = 1000000000; M = 0; k = 1; step = 10;
for i=1:N
    x = rand;     y = rand;
    if x*x + y*y <= 1
        M = M+1;
    end
    if rem(i,step) == 0
        s = [num2str(i), ' ', num2str(M/i)];
        disp(s); k = k+1;
    end
    if k == 10
        step = step * 10; k = 1;
    end
end
```

定積分の計算


0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
積分値
10^0 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7 10^8 10^9
回数
数値解 #1
数値解 #2
数値解 #3
解析解

多重定積分の計算

多重定積分

$$S_n = \int \int \cdots \int_{D_n} \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \cdots\, \mathrm{d}x_n$$

積分領域

$$D_n = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1, \right. \\ \left. x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \right\}$$

被積分関数

$$y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}$$

多重定積分の計算

$x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0, 1], \quad y \in [0, 1]$
点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ をランダムに発生させる.

$$(0 \leq x_1, x_2, \cdots, x_n, y \leq 1)$$

$$x_1 \sim U(0,1),\ x_2 \sim U(0,1),\ \cdots,\ x_n \sim U(0,1),\ y \sim U(0,1)$$

N : 発生させた点の個数
M : $y \leq \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}$ を満たす点の個数

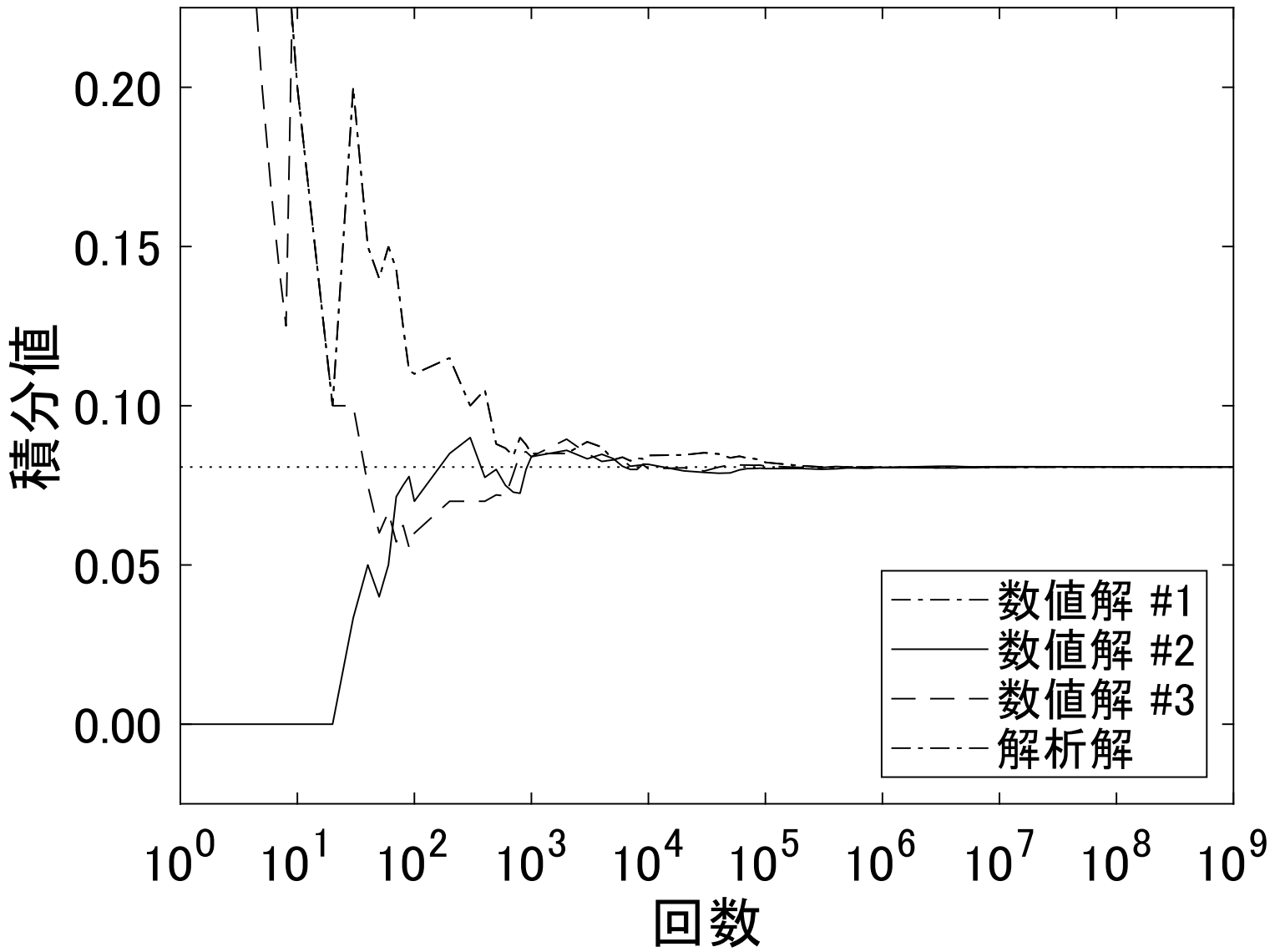
多重定積分の計算

$$M : N = S_n : 1$$

$$\Downarrow$$

$$S_n = \frac{M}{N}$$

多重定積分 S_5 の計算


積分値
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
10^0 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7 10^8 10^9
回数
数値解 #1
数値解 #2
数値解 #3
解析解

同じ誕生日

問題

n 人のグループで．誕生日が同じ人たちがいる確率を求める．

問題を簡単にするため，2 月 29 日は考えない．
誕生日の確率分布は，一様であると仮定する．

同じ誕生日

問題

n 人のグループで．誕生日が同じ人たちがいる確率を求める．

問題を簡単にするため，2 月 29 日は考えない．
誕生日の確率分布は，一様であると仮定する．

モンテカルロシミュレーションで解く．

- 1 月 1 日，1 月 2 日，1 月 3 日，$\cdots$，12 月 31 日に，
  $1, 2, 3, \cdots, 365$ を対応させる．
- 一様に値 $1, 2, 3, \cdots, 365$ を取る乱数を，n 個発生させる．
- n 個の値の中に同じ値があるか否かを調べる．
- 以上の試行を複数回繰返し，同じ値がある頻度を数える．

same_birthday_simulation.m

```
n = 23; same = 0; diff = 0;
for iteration=1:1000
    birthday = ceil(365*rand(1,n));
    found = 0;
    for k=1:n
        if ismember(birthday(k), birthday(k+1:n))
            found = 1;
            break;
        end
    end
    if found
        same = same + 1;
    else
        diff = diff + 1;
    end
end
```

同じ誕生日

$n = 5$ で，頻度を 10 回数えた結果の例

5 人	同じ人がいる 24 回	すべて異なる 976 回
5 人	同じ人がいる 21 回	すべて異なる 979 回
5 人	同じ人がいる 28 回	すべて異なる 972 回
5 人	同じ人がいる 39 回	すべて異なる 961 回
5 人	同じ人がいる 26 回	すべて異なる 974 回
5 人	同じ人がいる 24 回	すべて異なる 976 回
5 人	同じ人がいる 24 回	すべて異なる 976 回
5 人	同じ人がいる 27 回	すべて異なる 973 回
5 人	同じ人がいる 29 回	すべて異なる 971 回
5 人	同じ人がいる 33 回	すべて異なる 967 回

同じ誕生日

$n = 23$ で，頻度を 10 回数えた結果の例

23 人	同じ人がいる	493 回	すべて異なる	507 回
23 人	同じ人がいる	496 回	すべて異なる	504 回
23 人	同じ人がいる	511 回	すべて異なる	489 回
23 人	同じ人がいる	514 回	すべて異なる	486 回
23 人	同じ人がいる	476 回	すべて異なる	524 回
23 人	同じ人がいる	507 回	すべて異なる	493 回
23 人	同じ人がいる	530 回	すべて異なる	470 回
23 人	同じ人がいる	519 回	すべて異なる	481 回
23 人	同じ人がいる	501 回	すべて異なる	499 回
23 人	同じ人がいる	531 回	すべて異なる	469 回

同じ誕生日

$n = 30$ で，頻度を 10 回数えた結果の例

30 人	同じ人がいる	708 回	すべて異なる	292 回
30 人	同じ人がいる	684 回	すべて異なる	316 回
30 人	同じ人がいる	717 回	すべて異なる	283 回
30 人	同じ人がいる	712 回	すべて異なる	288 回
30 人	同じ人がいる	713 回	すべて異なる	287 回
30 人	同じ人がいる	708 回	すべて異なる	292 回
30 人	同じ人がいる	701 回	すべて異なる	299 回
30 人	同じ人がいる	690 回	すべて異なる	310 回
30 人	同じ人がいる	716 回	すべて異なる	284 回
30 人	同じ人がいる	724 回	すべて異なる	276 回

同じ誕生日

$n = 50$ で，頻度を 10 回数えた結果の例

50	人	同じ人がいる	974	回	すべて異なる 26 回
50	人	同じ人がいる	968	回	すべて異なる 32 回
50	人	同じ人がいる	972	回	すべて異なる 28 回
50	人	同じ人がいる	964	回	すべて異なる 36 回
50	人	同じ人がいる	967	回	すべて異なる 33 回
50	人	同じ人がいる	962	回	すべて異なる 38 回
50	人	同じ人がいる	970	回	すべて異なる 30 回
50	人	同じ人がいる	981	回	すべて異なる 19 回
50	人	同じ人がいる	967	回	すべて異なる 33 回
50	人	同じ人がいる	982	回	すべて異なる 18 回

同じ誕生日

2 月 29 日を考慮

$\Rightarrow$ 2 月 29 日に値 366 を対応させる

乱数が 366 となる確率は，他の値の確率の $1/4$

誕生日の確率分布を考慮

$\Rightarrow$ 確率分布を乱数の発生確率に反映させる

$\Downarrow$

モンテカルロ法は，様々な条件に対応することができる

二人零和ゲーム

$G_{\mathrm{A}}^{*} > 0$ の例

$$\begin{bmatrix} g_{\mathrm{PP}} & g_{\mathrm{PQ}} \\ g_{\mathrm{QP}} & g_{\mathrm{QQ}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +5 & -8 \\ -2 & +5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x^{*} \\ y^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.65 \end{bmatrix}$$

$G_{\mathrm{A}}^{*} = 0$ の例

$$\begin{bmatrix} g_{\mathrm{PP}} & g_{\mathrm{PQ}} \\ g_{\mathrm{QP}} & g_{\mathrm{QQ}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +4 & -8 \\ -2 & +4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x^{*} \\ y^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$G_{\mathrm{A}}^{*} < 0$ の例

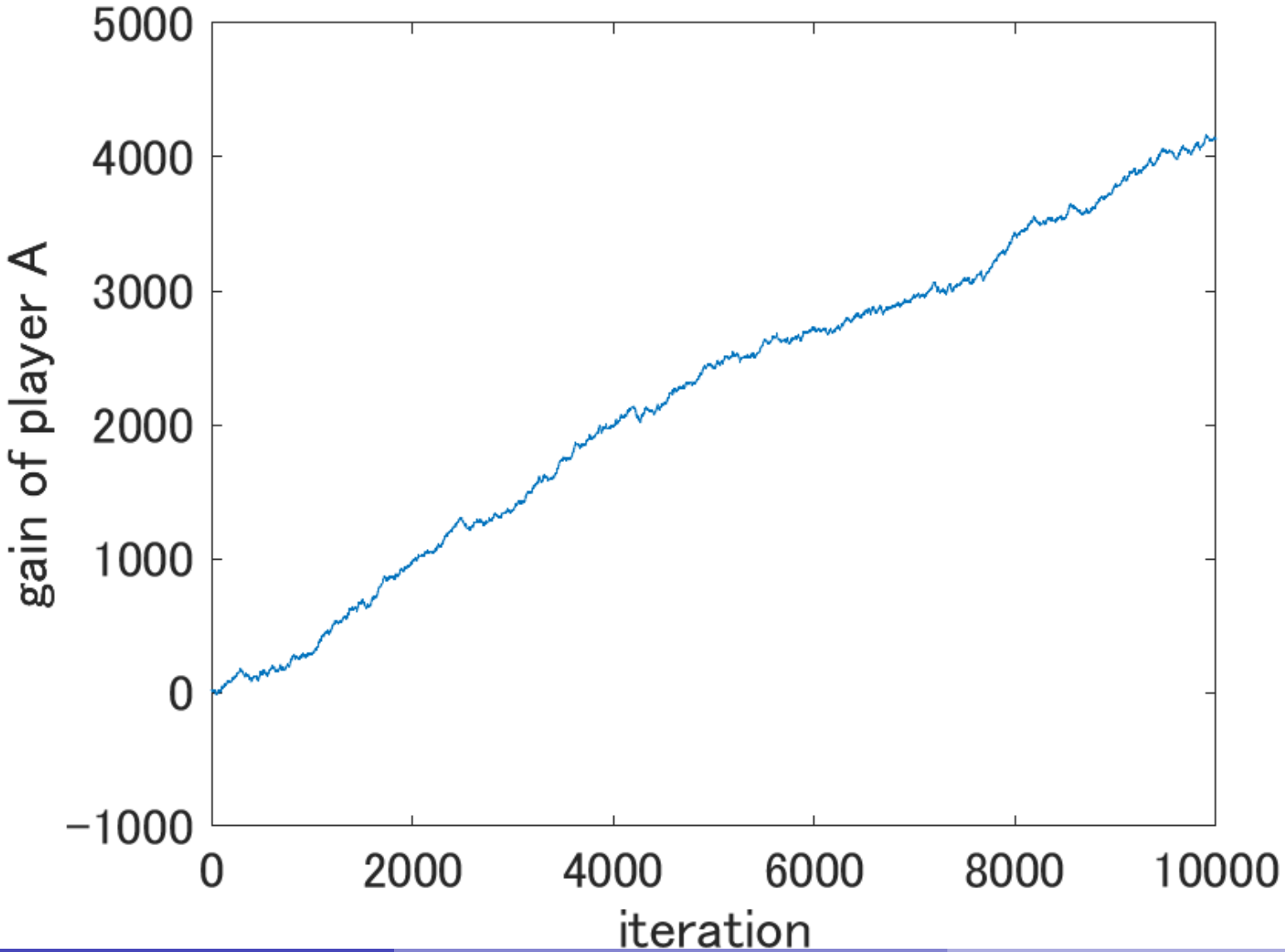
$$\begin{bmatrix} g_{\mathrm{PP}} & g_{\mathrm{PQ}} \\ g_{\mathrm{QP}} & g_{\mathrm{QQ}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3 & -8 \\ -2 & +3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x^{*} \\ y^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/16 \\ 11/16 \end{bmatrix}$$

zero_sum_game_simulation.m

```
g = [  5, -8;  -2,  5 ];
x = 0.35; y = 0.65;

gainA = 0; result = [];
for iteration=1:10000
    if rand < x A = 1; else A = 2; end
    if rand < y B = 1; else B = 2; end
    gainA = gainA + g(A,B);
    result = [ result; iteration, gainA ];
end

plot(result(:,1), result(:,2));
```

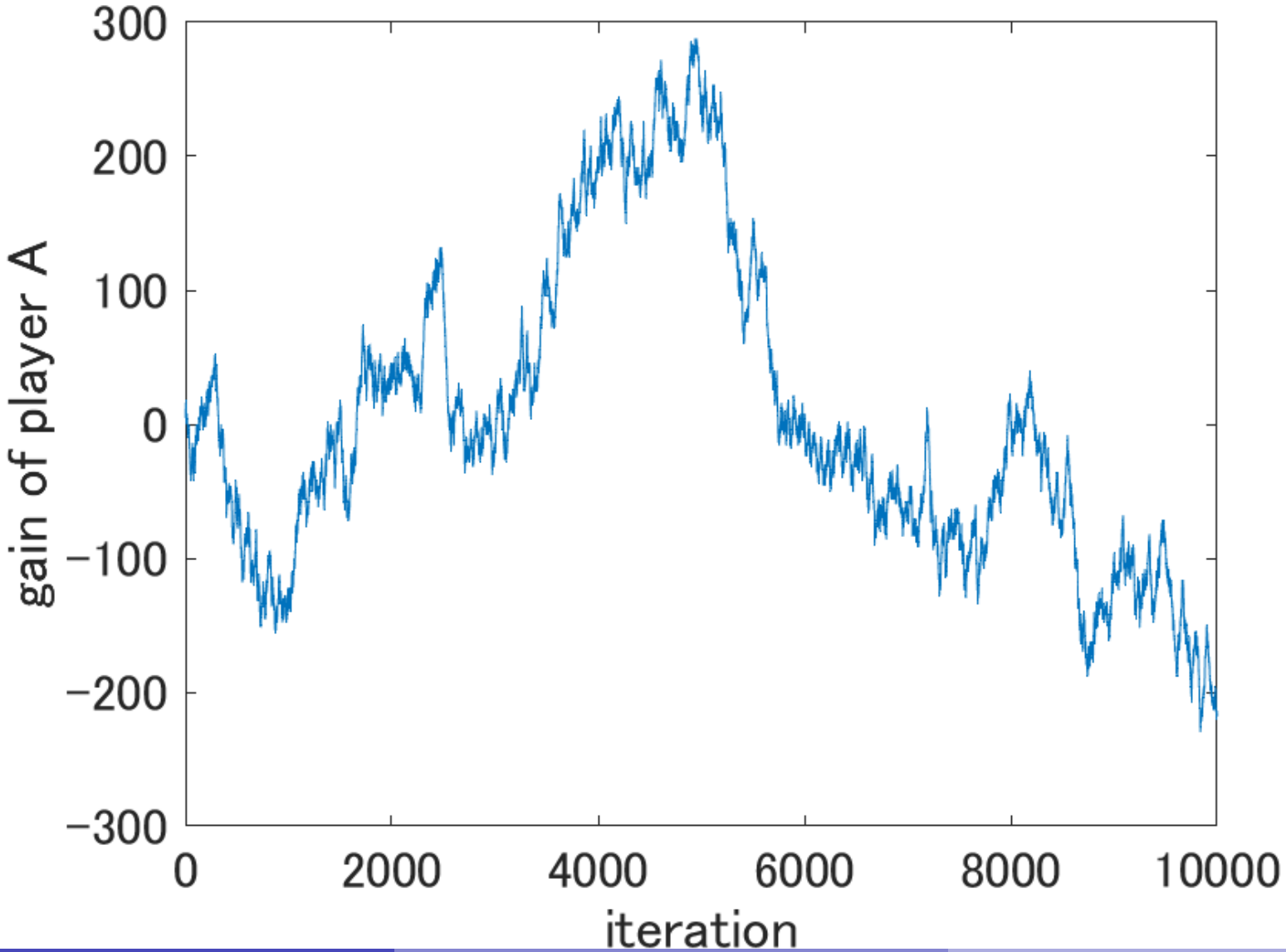
二人零和ゲーム

$G_{\mathrm{A}}^{*} > 0$ の例



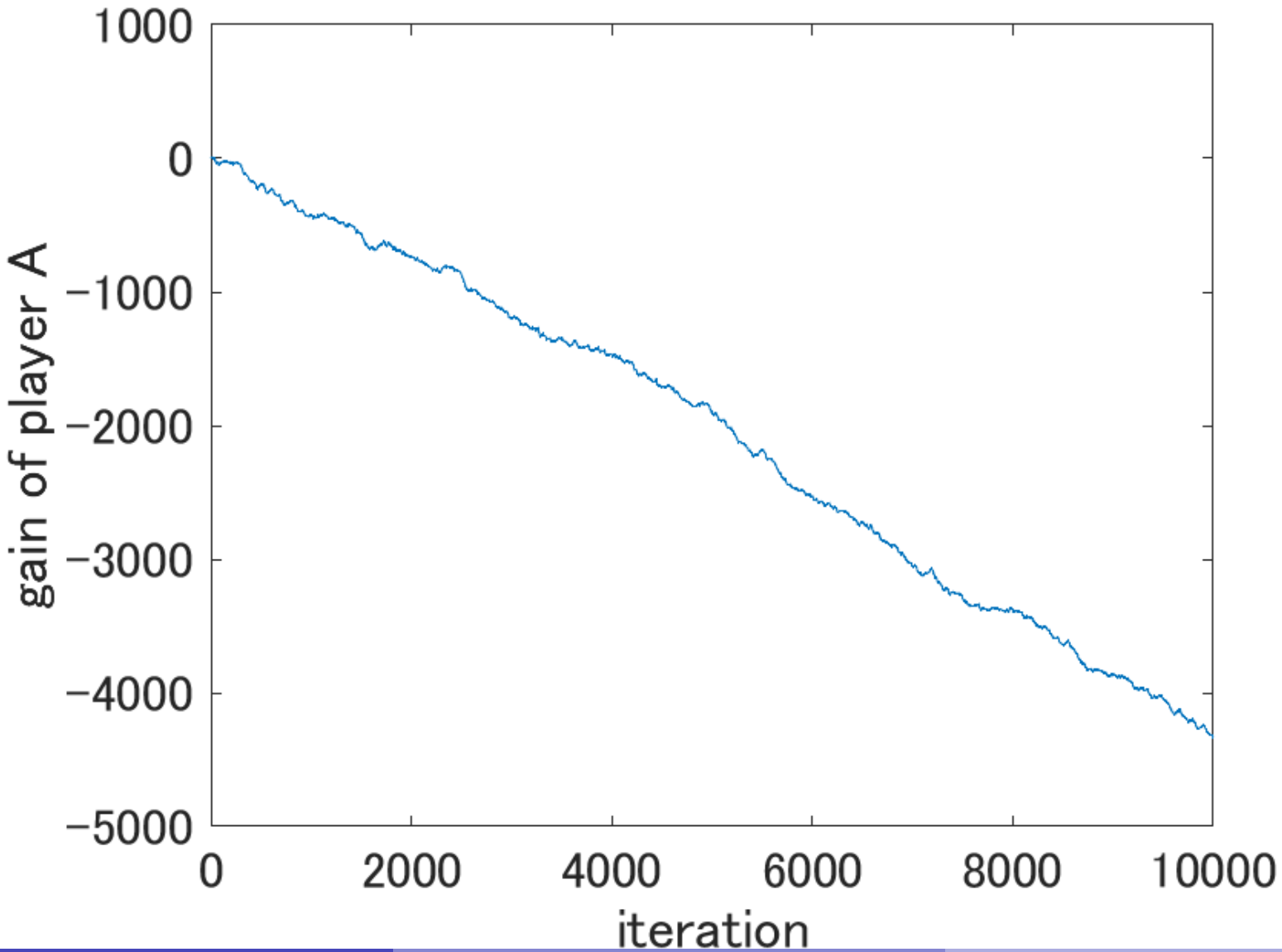
二人零和ゲーム

$G_{\mathrm{A}}^{*} = 0$ の例

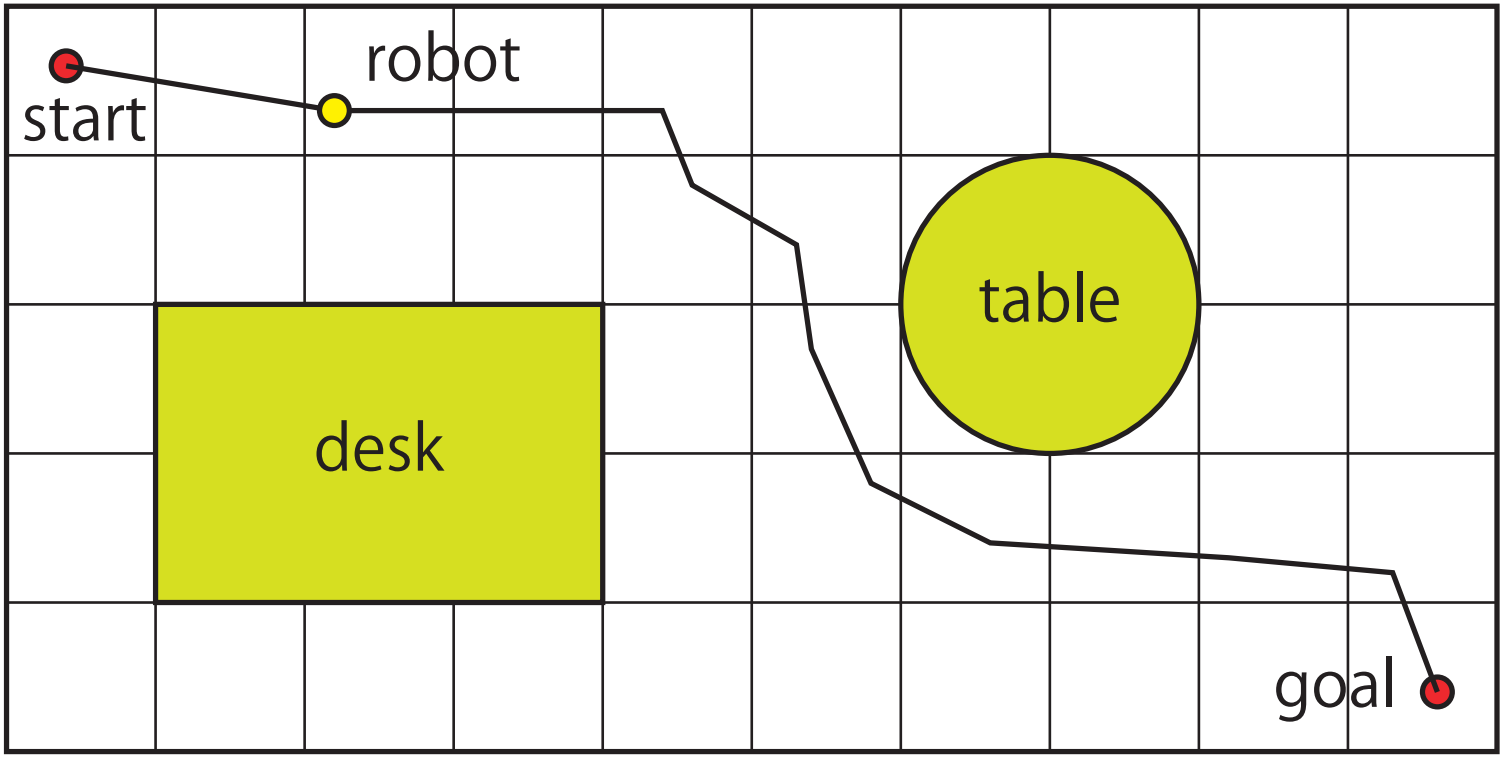


二人零和ゲーム

$G_{\mathrm{A}}^{*} < 0$ の例

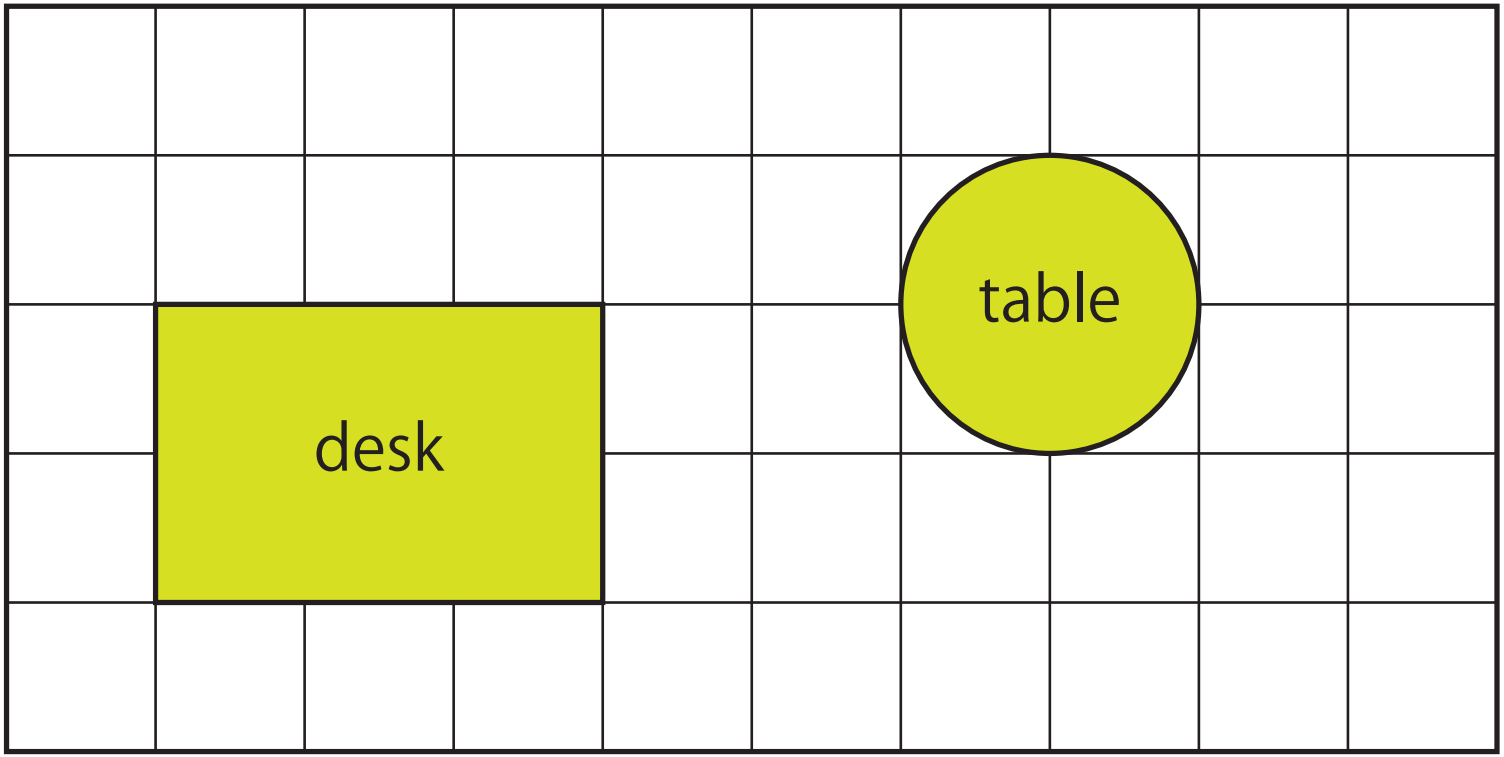


移動ロボットの経路計画



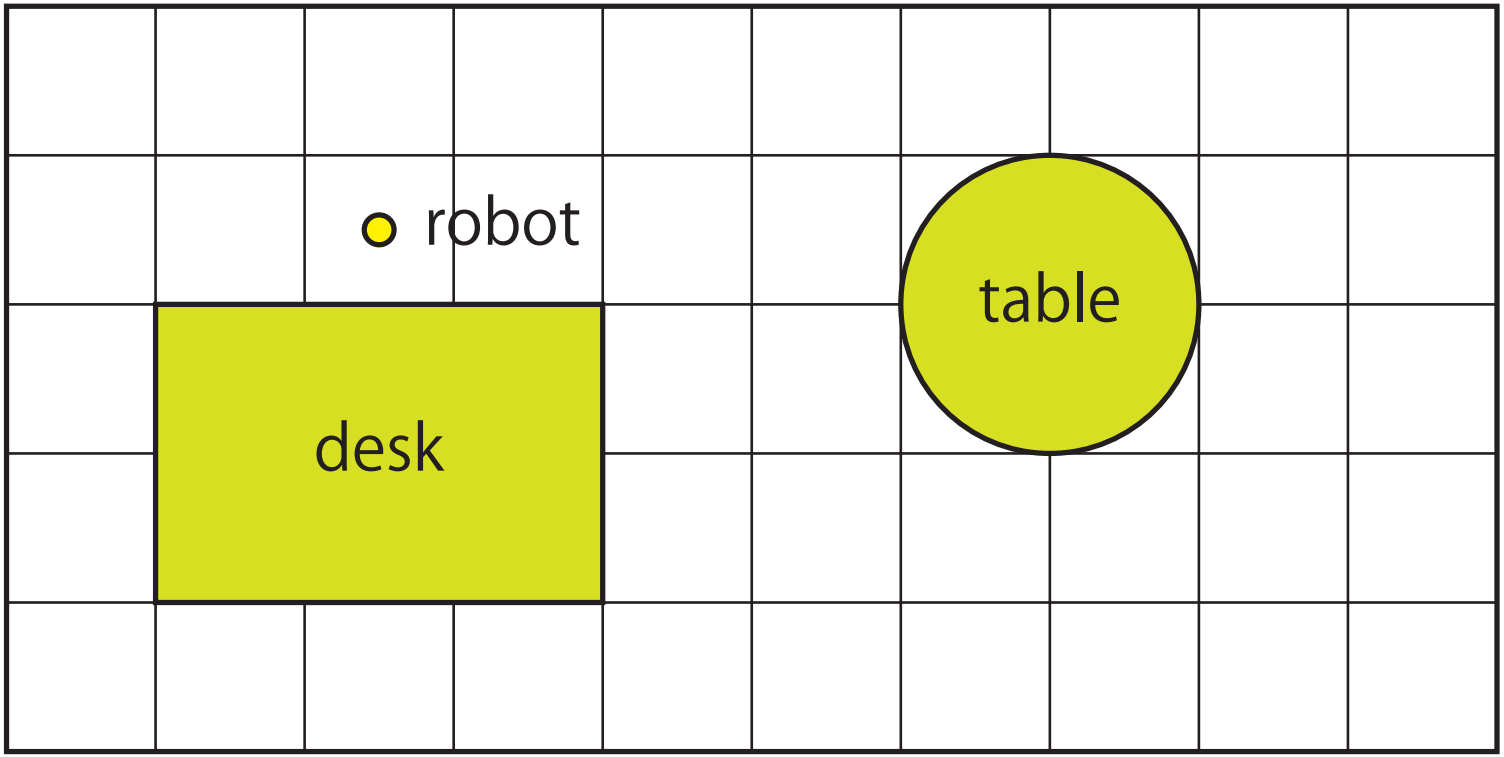
障害物（机，テーブル）と干渉や接触をすることなく
スタートからゴールに至る経路を見つける

移動ロボットの経路計画



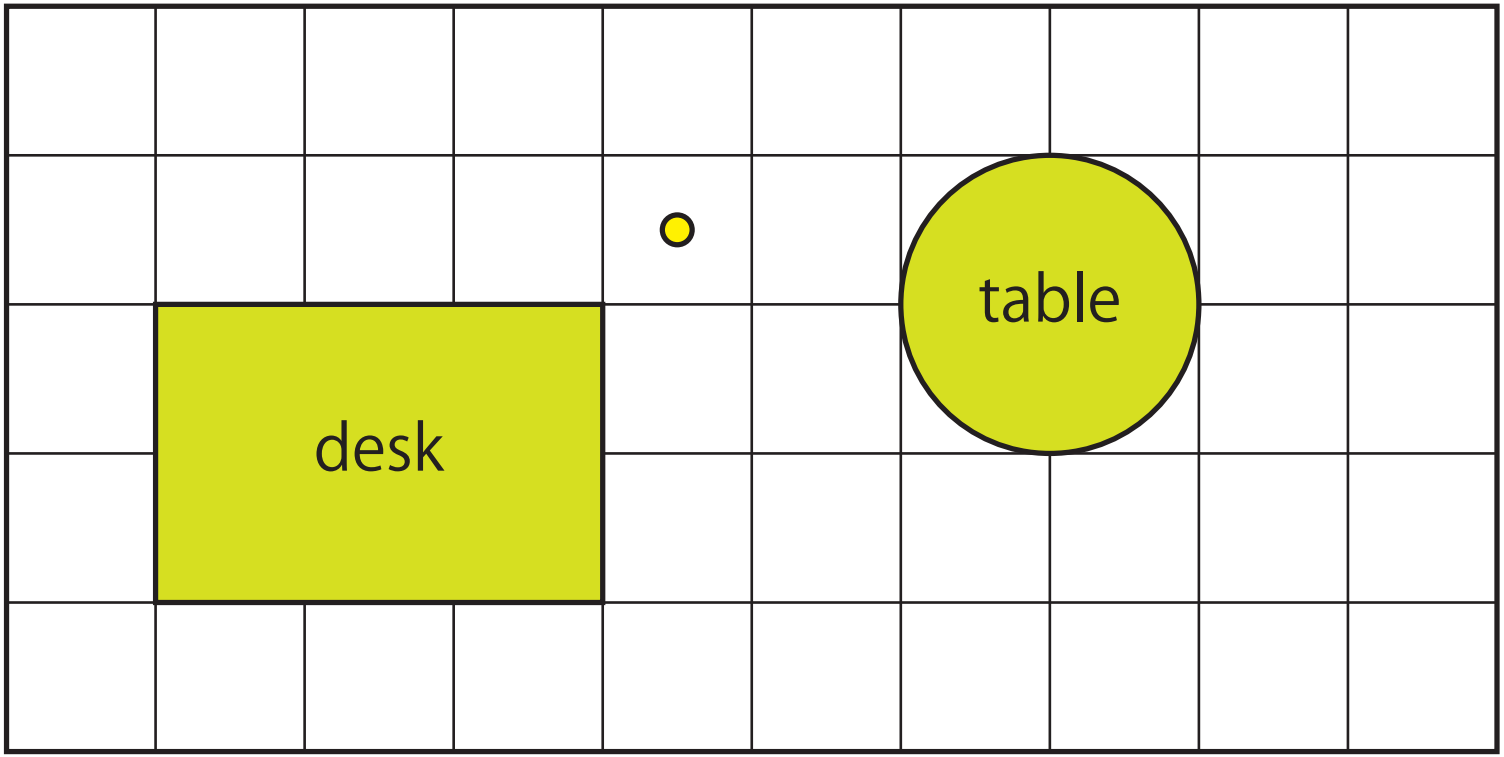
部屋の大きさ：　横 10m　縦 5m
机　　（長方形　横 3m　縦 2m）
テーブル　（円形　半径 1m）

移動ロボットの経路計画



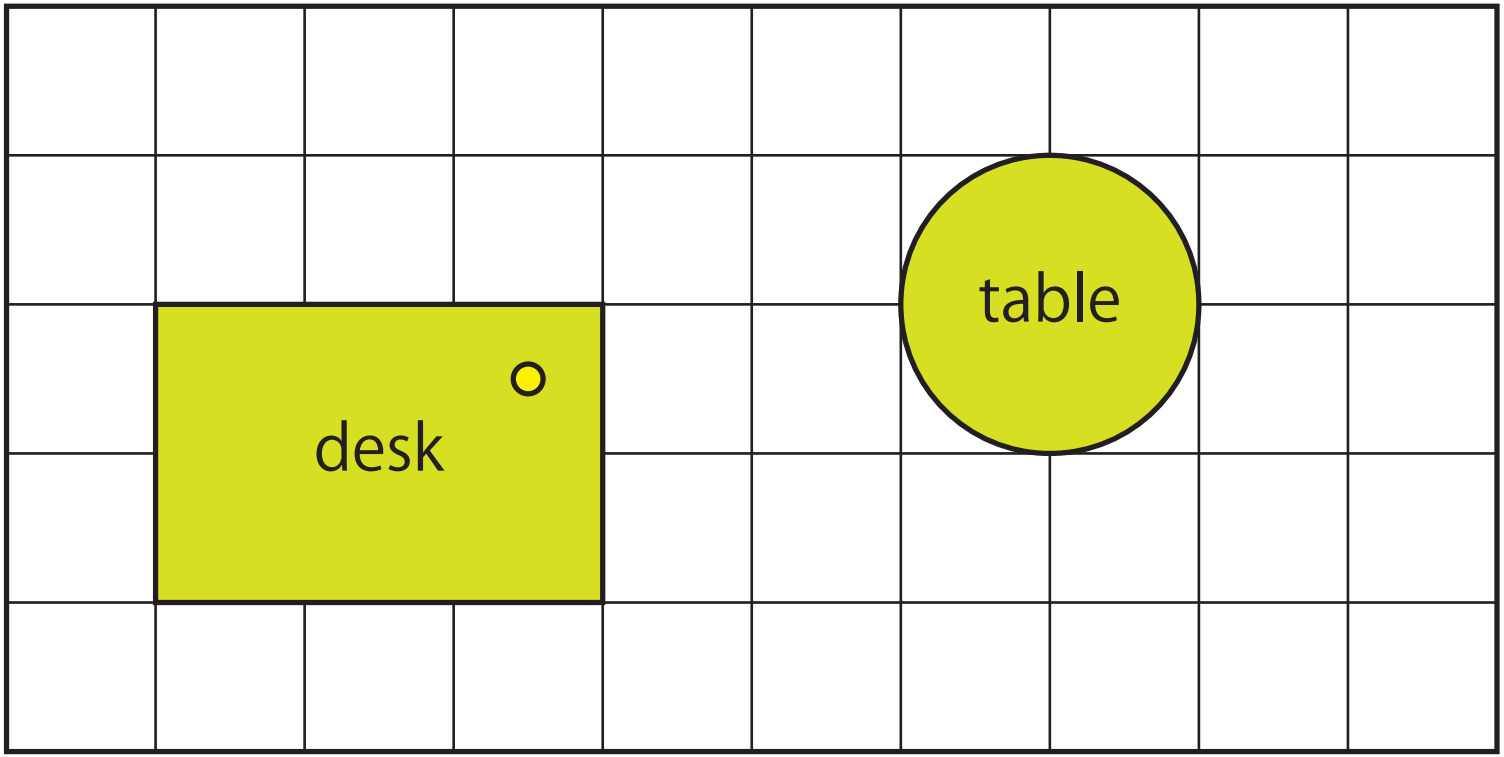
移動ロボット：　大きさを無視する　→　点とみなす
部屋の左下角に原点を設定
→　移動ロボットの位置　座標 (x, y)

移動ロボットの経路計画



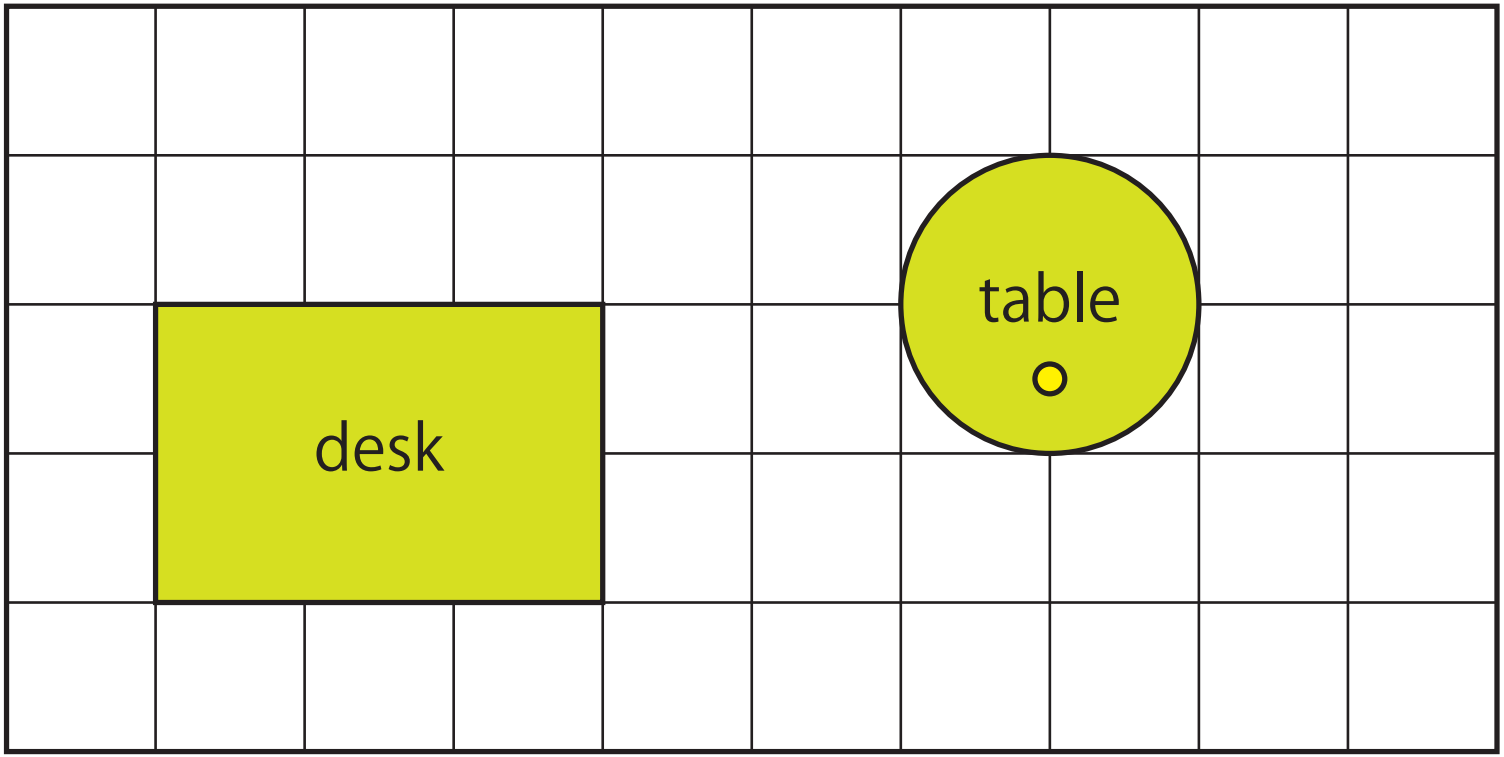
ロボットの位置 (4.50, 3.50)
自由 (free)

移動ロボットの経路計画



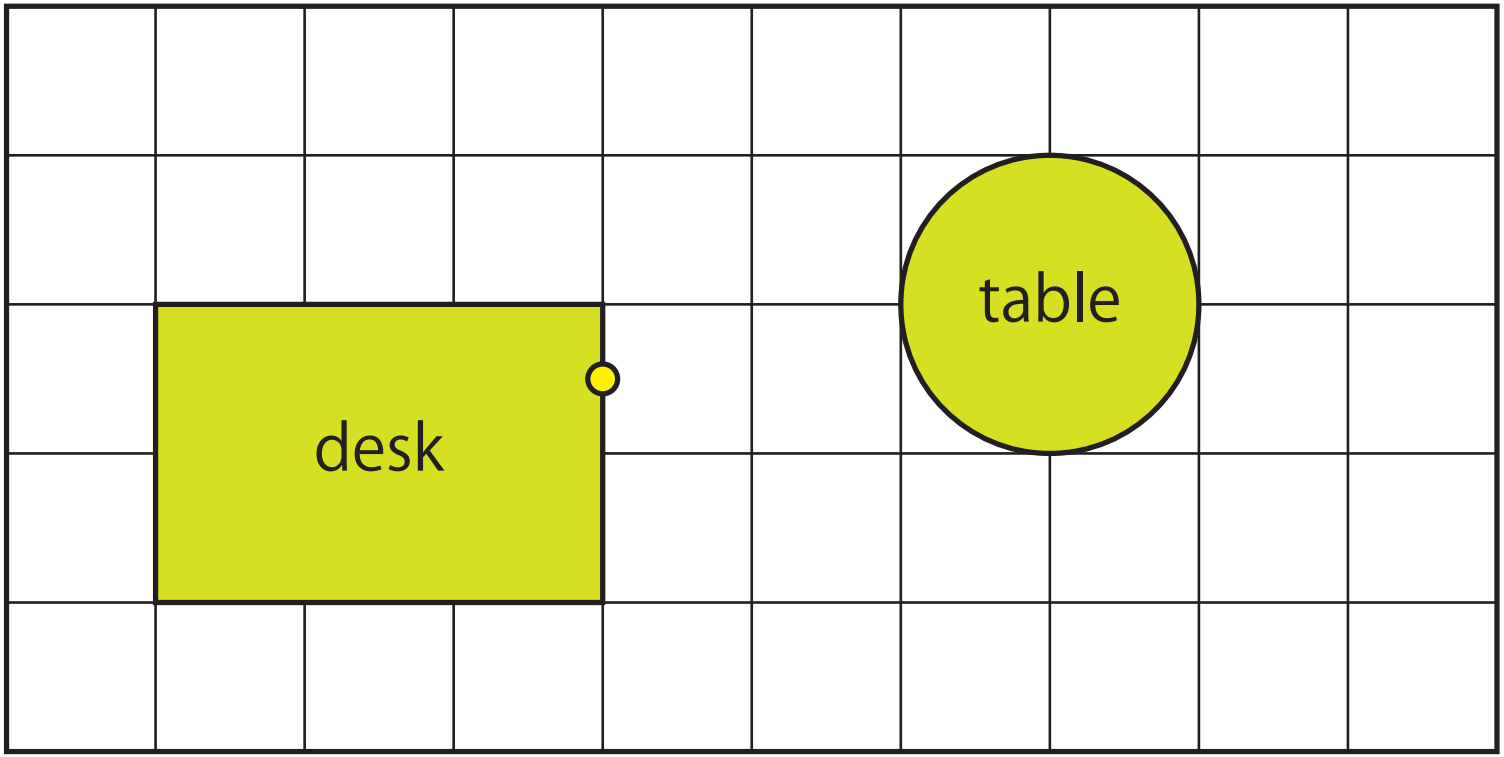
ロボットの位置 (3.50, 2.50)
干渉 (interfered)
→ 物理的に起こらない

移動ロボットの経路計画



ロボットの位置 (7.00, 2.50)
干渉 (interfered)
→ 物理的に起こらない

移動ロボットの経路計画



ロボットの位置 (4.00, 2.50)

接触 (contact)

→ 起こりうるが望ましくない

干渉チェック

仮定：部屋や障害物の幾何情報はすべて既知

移動ロボットの座標 (x, y)
仮定：$0 \leq x \leq 10$ ならびに $0 \leq y \leq 5$

入力 (x, y)　出力：自由 or 干渉（接触を含む）

$1 \leq x \leq 4$ かつ $1 \leq y \leq 3$ ならば机と干渉
$(x-7)^2 + (y-3)^2 \leq 1^2$ ならばテーブルと干渉
それ以外ならば自由

MATLAB: PRM_free_point_check.m

```
function status = PRM_free_point_check ( p )
    x = p(1); y = p(2);
    if ( 1 <= x && x <= 4 && 1 <= y && y <=3 )
        status = 0;
        return;
    end
    if ((x-7)^2 + (y-3)^2 <= 1^2)
        status = 0;
        return;
    end
    status = 1;
end
```

干渉チェック

線分の干渉

点 P と点 Q とを結ぶ線分が自由

$\Updownarrow$

線分 PQ 上の任意の点で自由

短い線分の干渉チェック

点 P と点 Q が近い（距離が短い）

$\Updownarrow$

線分の有限個の内分点すべてで自由ならば
線分で自由と判定しても（実用上）良い

干渉チェック

線分 PQ　仮定：点 P と点 Q は自由
点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_P$　点 Q の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_Q$
ϵ：小さい正の定数　干渉チェックにおける点の間隔

短い線分の干渉チェック

初期化

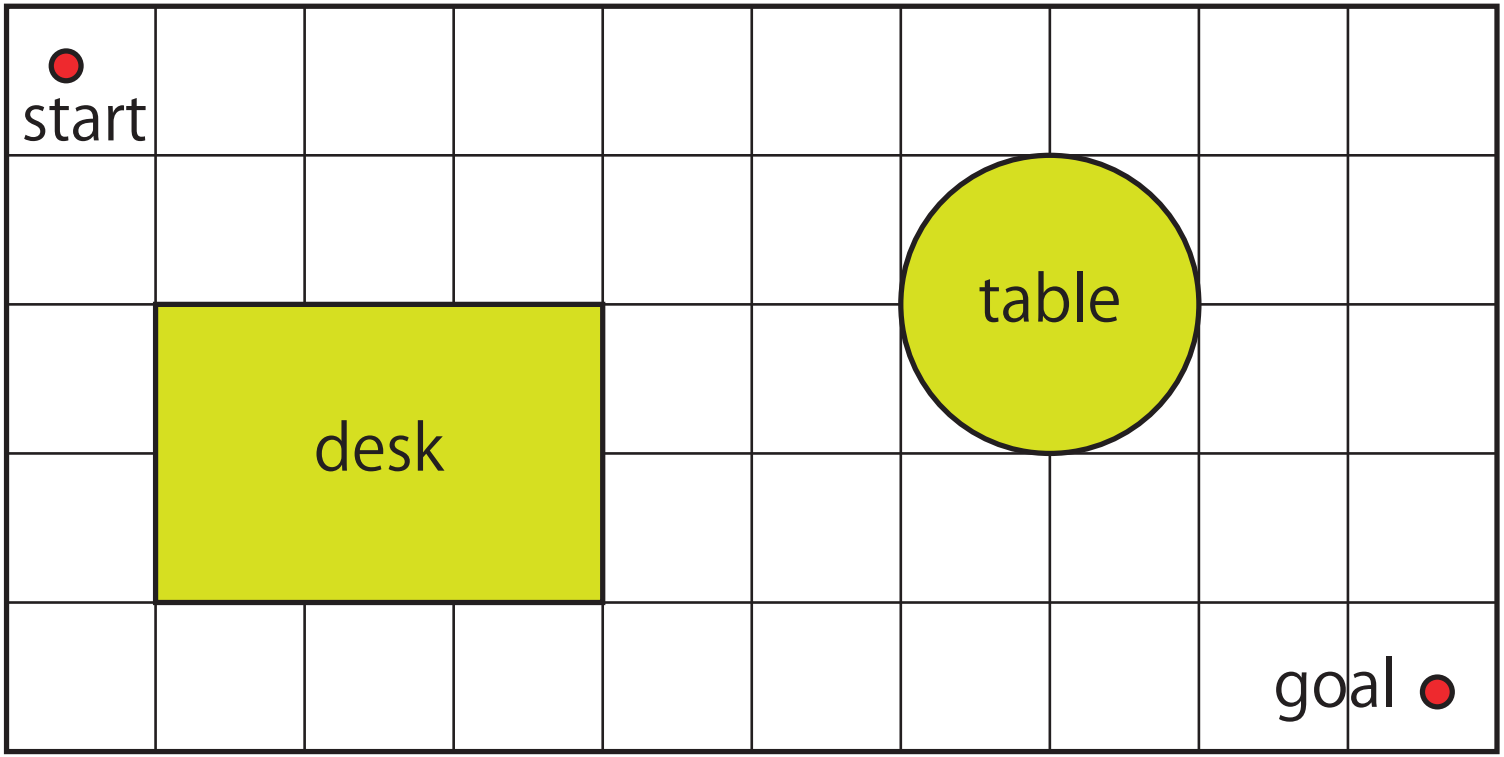
$$\boldsymbol{d} = \epsilon \frac{\boldsymbol{x}_Q - \boldsymbol{x}_P}{\| \boldsymbol{x}_Q - \boldsymbol{x}_P \|}, \quad n = \frac{\| \boldsymbol{x}_Q - \boldsymbol{x}_P \|}{\epsilon}$$

for $k = 1, 2, \cdots, n$ {
　もし $\boldsymbol{x}_P + k\boldsymbol{d}$ が干渉しているならば干渉を返す
}
自由を返す

MATLAB: PRM_free_edge_check.m

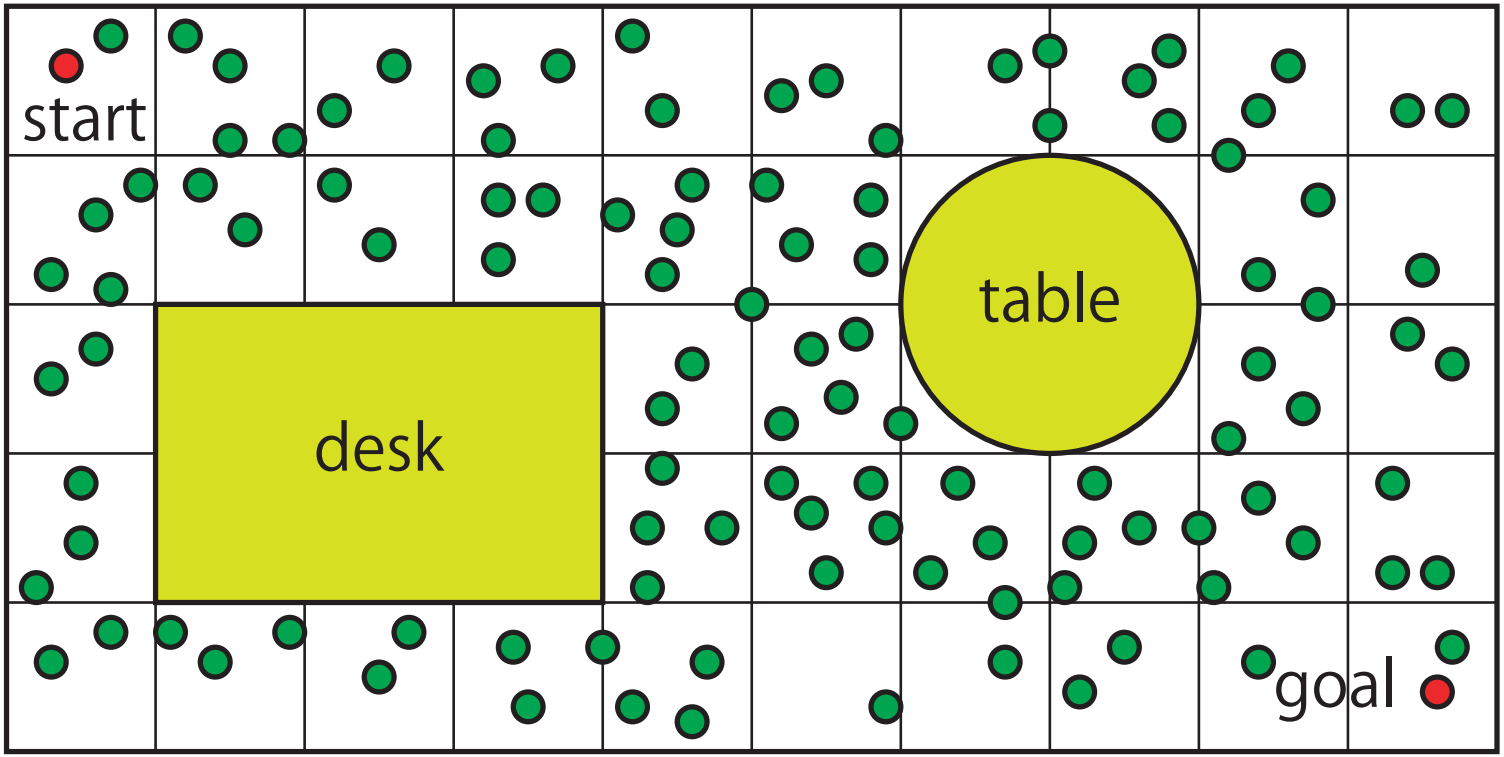
```
function status = PRM_free_edge_check ( ps, pe )
    eps = 1e-3;
    dse = pe - ps; ndse = norm(dse);
    d = eps*(dse/ndse);
    n = ndse/eps;
    for k=1:n
        p = ps + k*d;
        if PRM_free_point_check(p) == 0
            status = 0;
            return;
        end
    end
    status = 1;
end
```

PRM (Probabilistic Roadmaps)



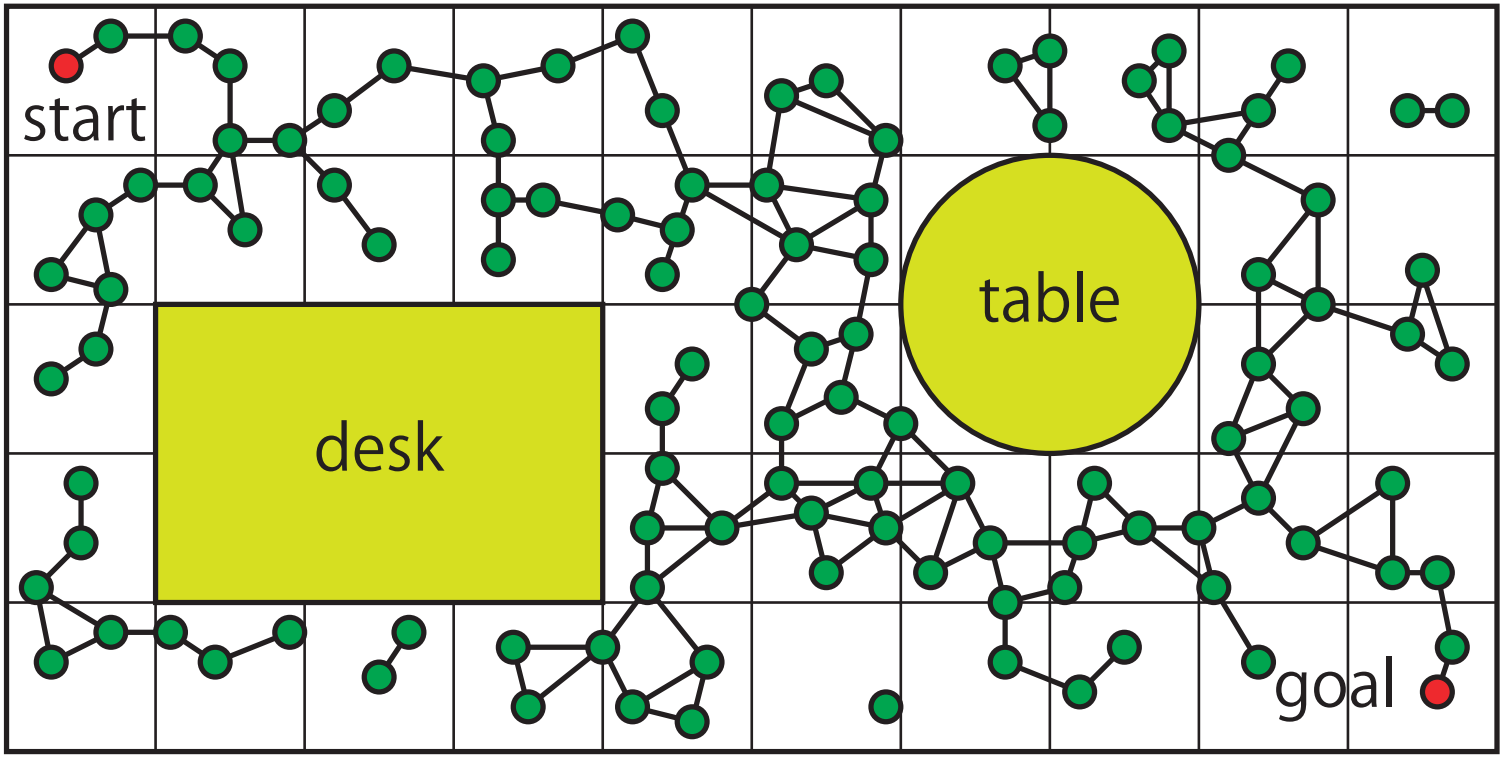
スタートとゴールの設定

PRM (Probabilistic Roadmaps)



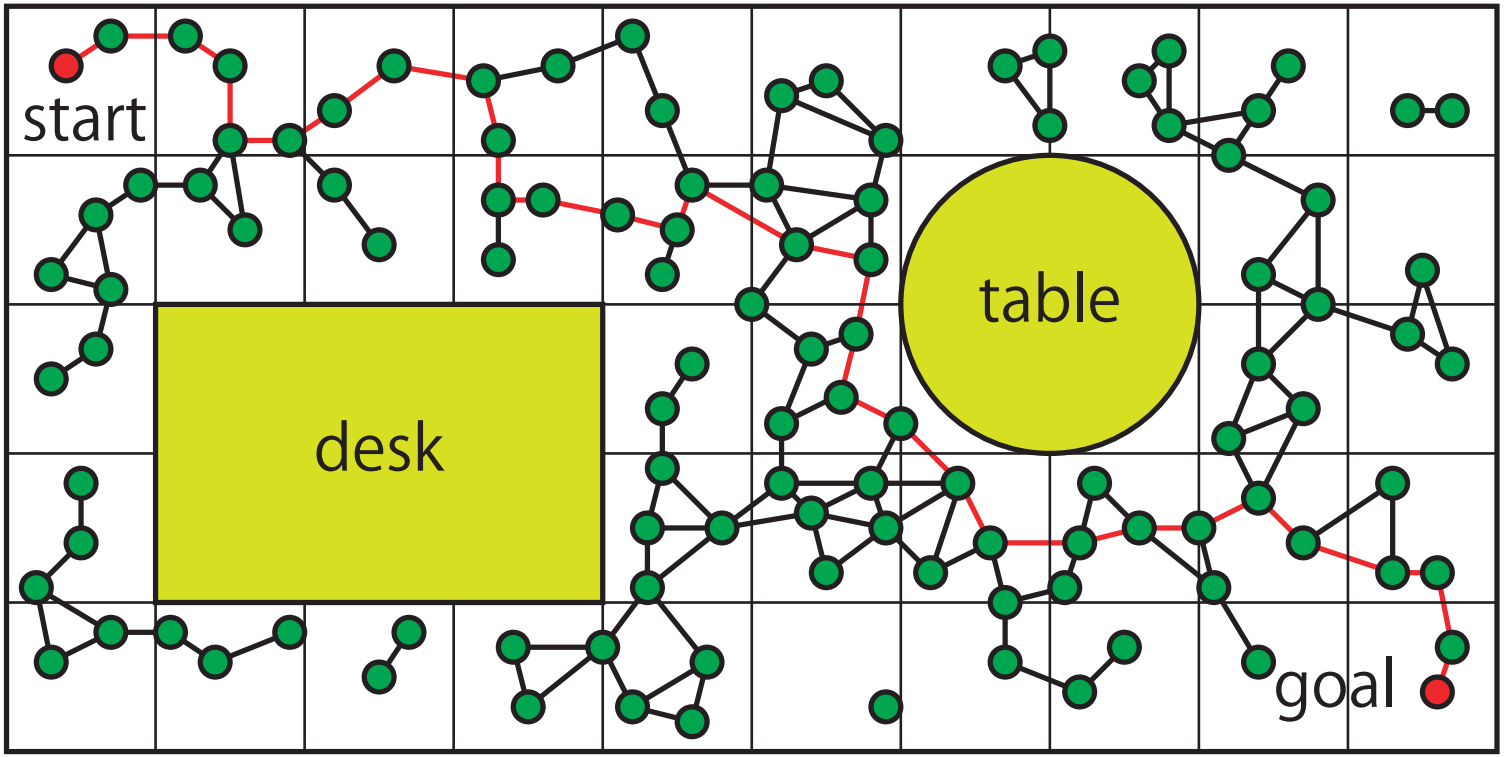
自由な点をランダムに生成

PRM (Probabilistic Roadmaps)



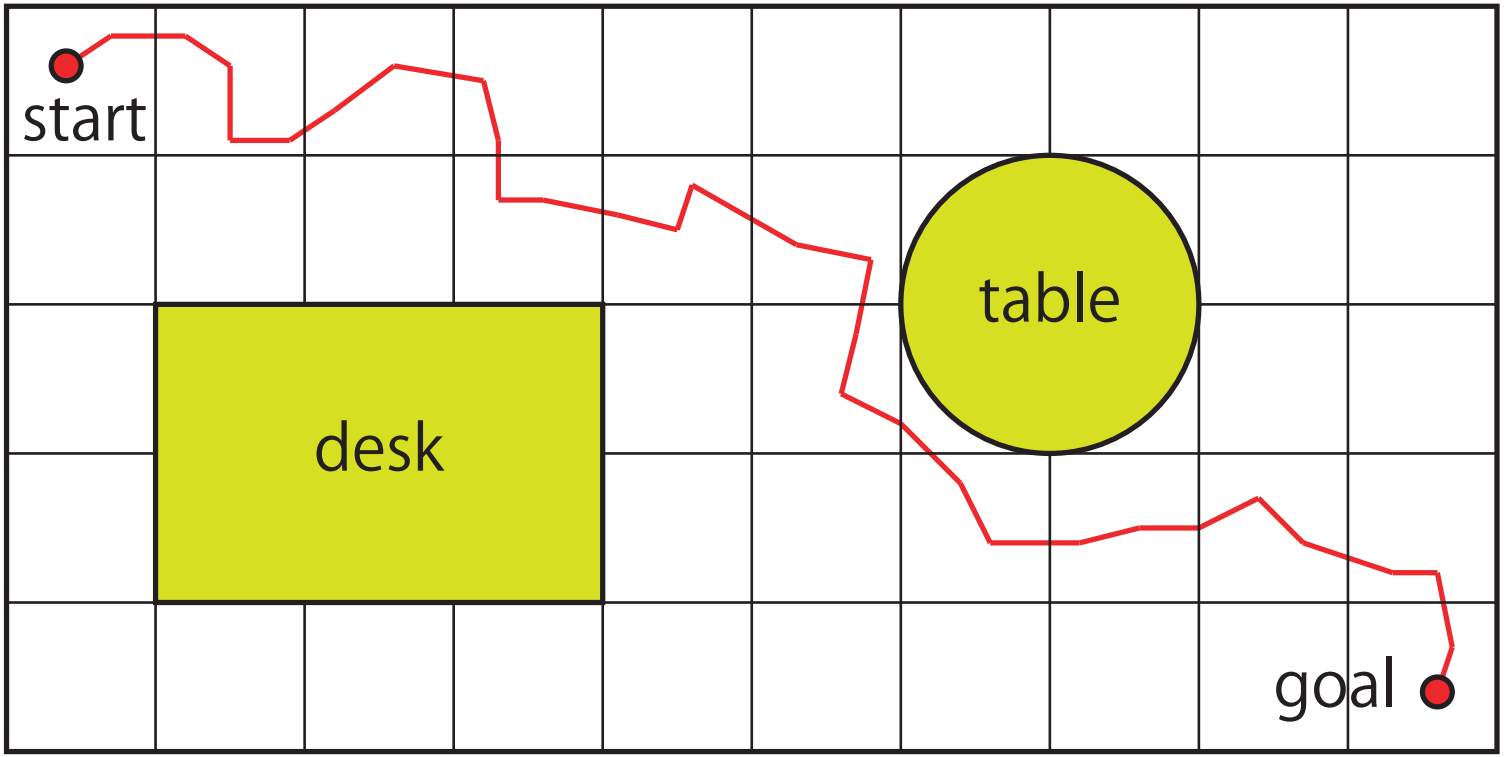
自由な短い線分をエッジで接続

PRM (Probabilistic Roadmaps)



スタートからゴールへ至る経路

PRM (Probabilistic Roadmaps)



結果

PRM (Probabilistic Roadmaps)

部屋内に自由な点を生成するアルゴリズム

集合 V = 空集合
while (集合 V の大きさが指定した個数未満) {
　部屋内にランダムに点を生成
　点が自由ならば，集合 V に追加する
}

サンプルプログラム

- PRM 自由な点を見つける
- PRM 自由な点か否かを判断

PRM (Probabilistic Roadmaps)

部屋内に自由な線分を生成するアルゴリズム

```
集合 E = 空集合
for 集合 V に含まれるすべての点 P に対して {
   for 集合 V に含まれるすべての点 Q に対して {
      if 距離 PQ が指定した値以下 {
         線分 PQ が自由ならば，集合 E に線分 PQ を追加
         }
      }
   }
}
```

サンプルプログラム

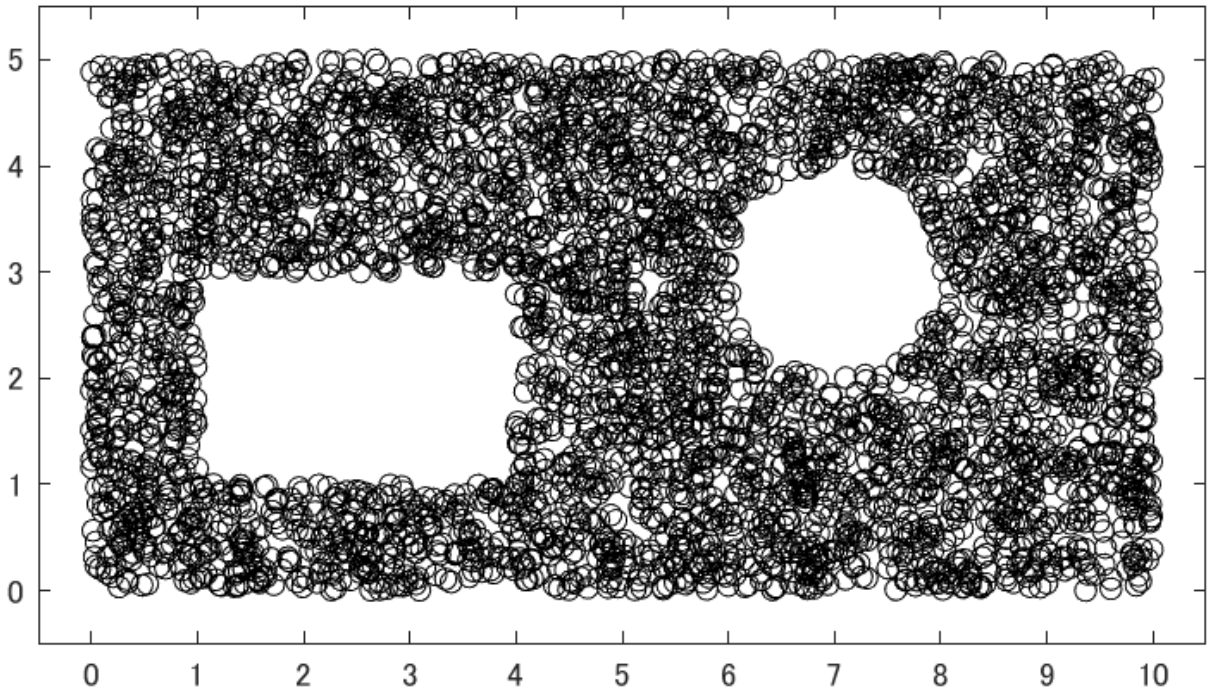
- PRM 自由な線分を見つける
- PRM 自由な線分か否かを判断

PRM (Probabilistic Roadmaps)

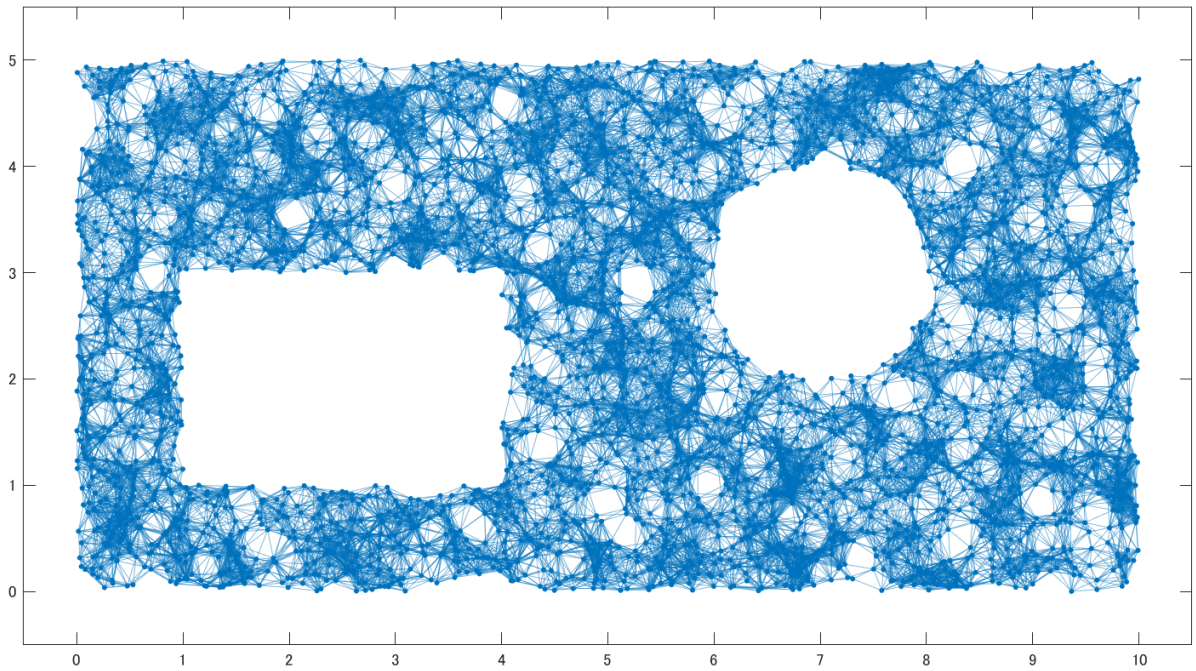
サンプルプログラム

- PRM グラフを作成する
- PRM 最短経路を見つける

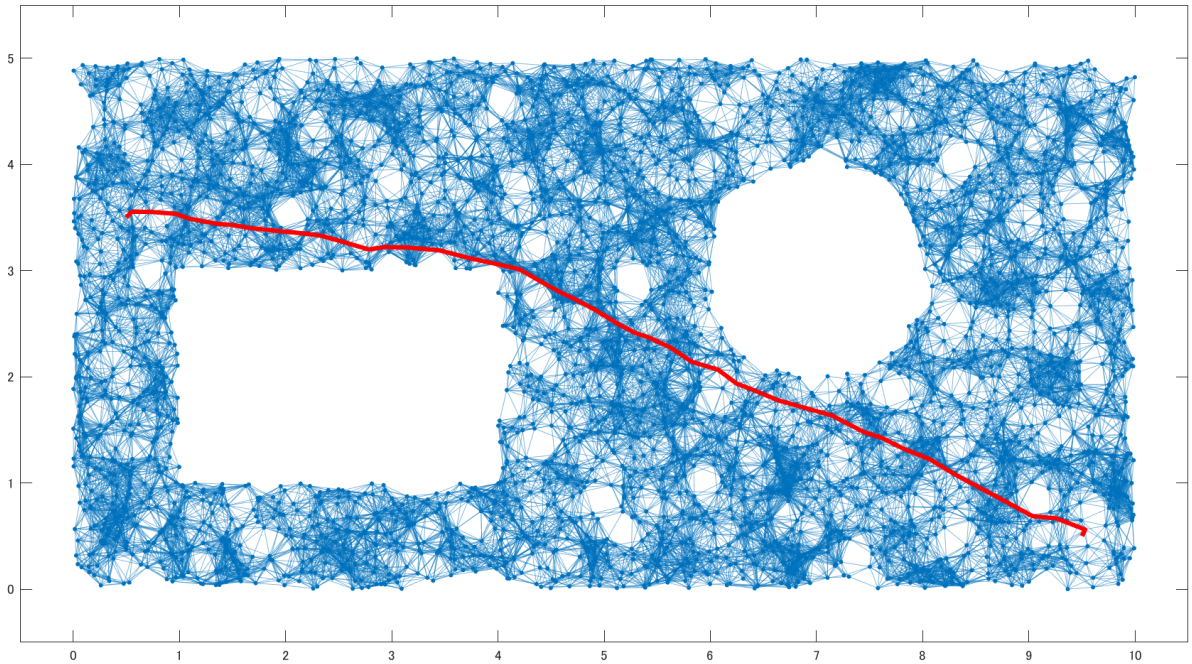
実行例（グラフを作成する）



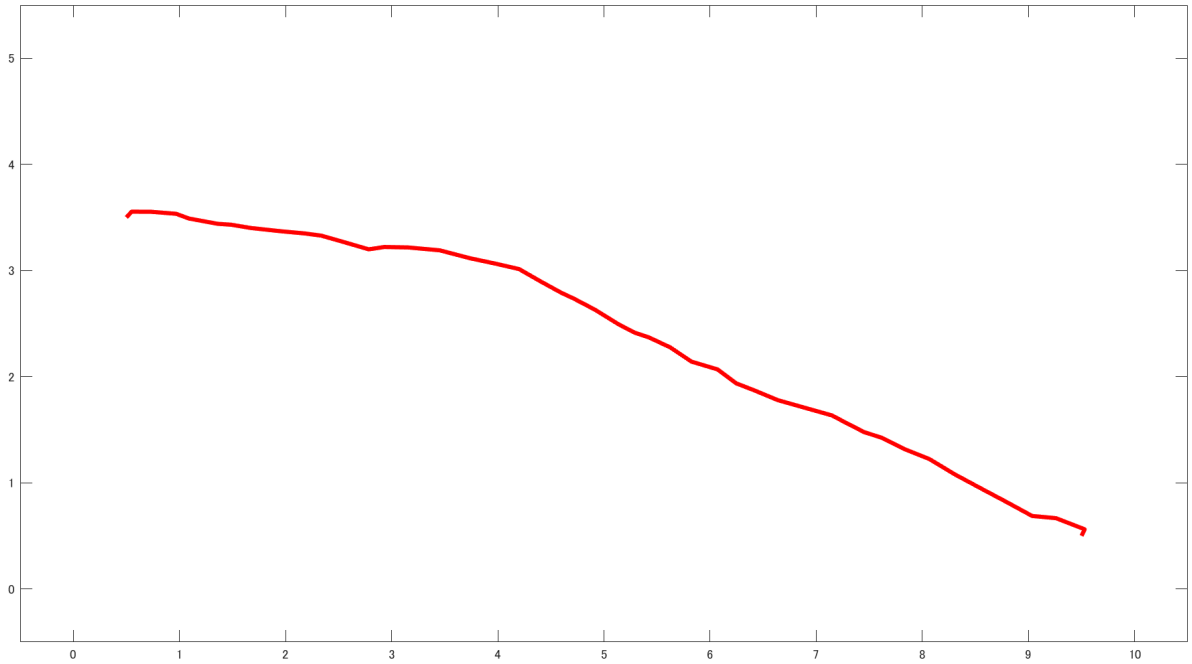
実行例（グラフを作成する）



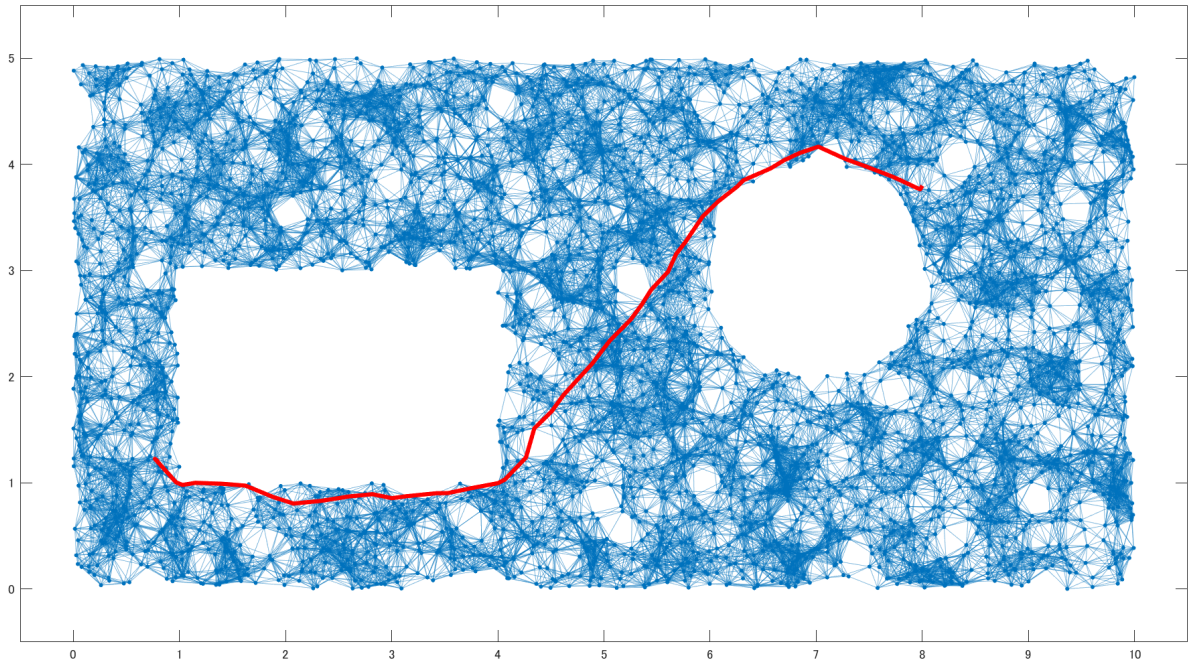
実行例（最短経路を見つける）



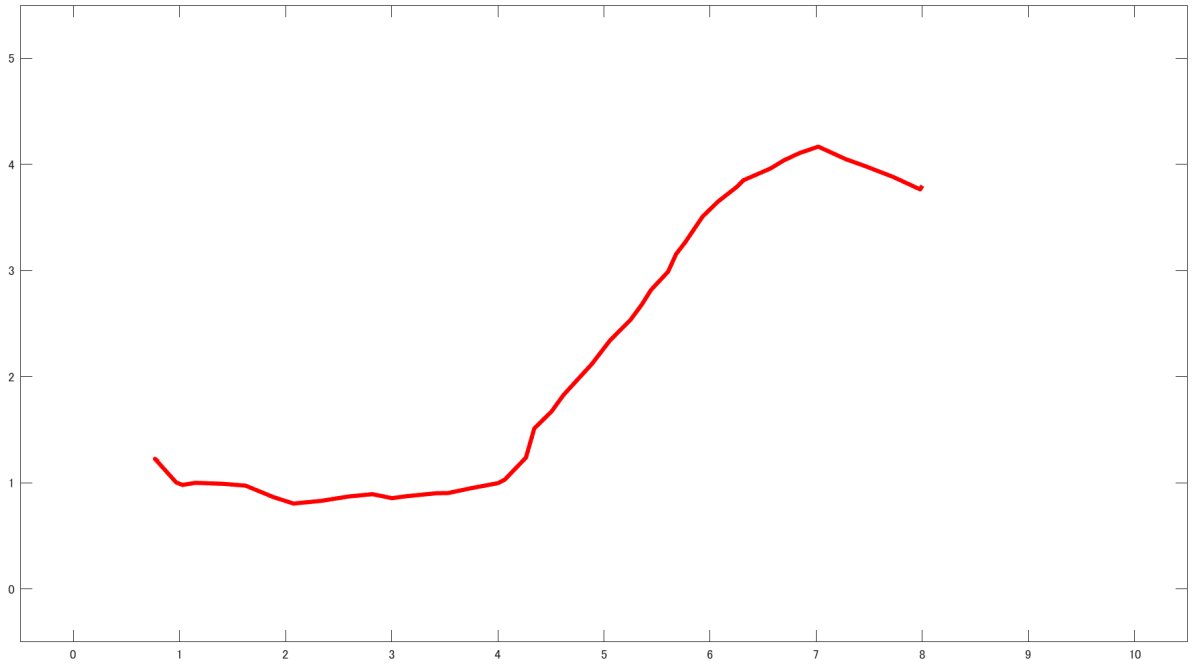
実行例（最短経路を見つける）



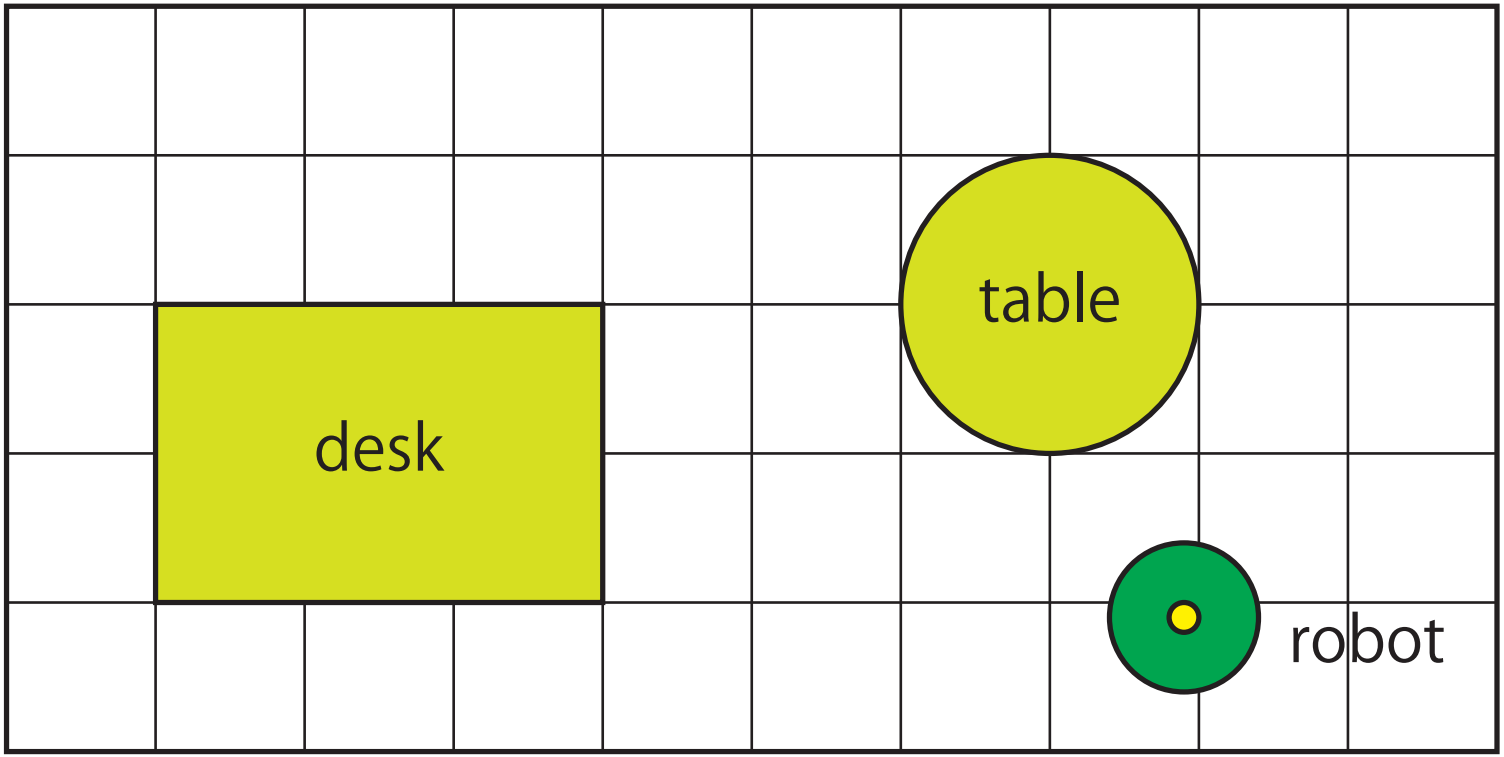
実行例（最短経路を見つける）



実行例（最短経路を見つける）

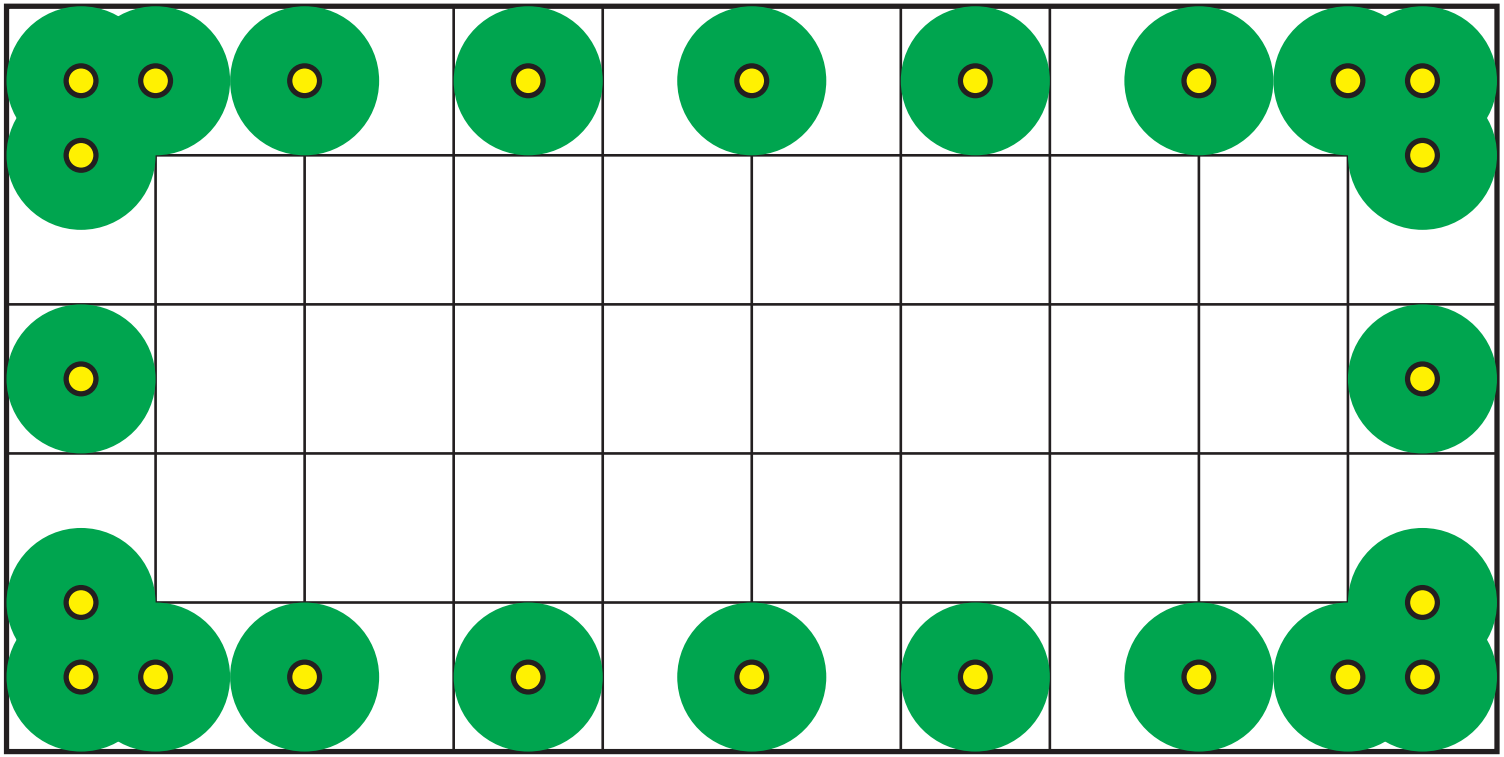


移動ロボットの経路計画



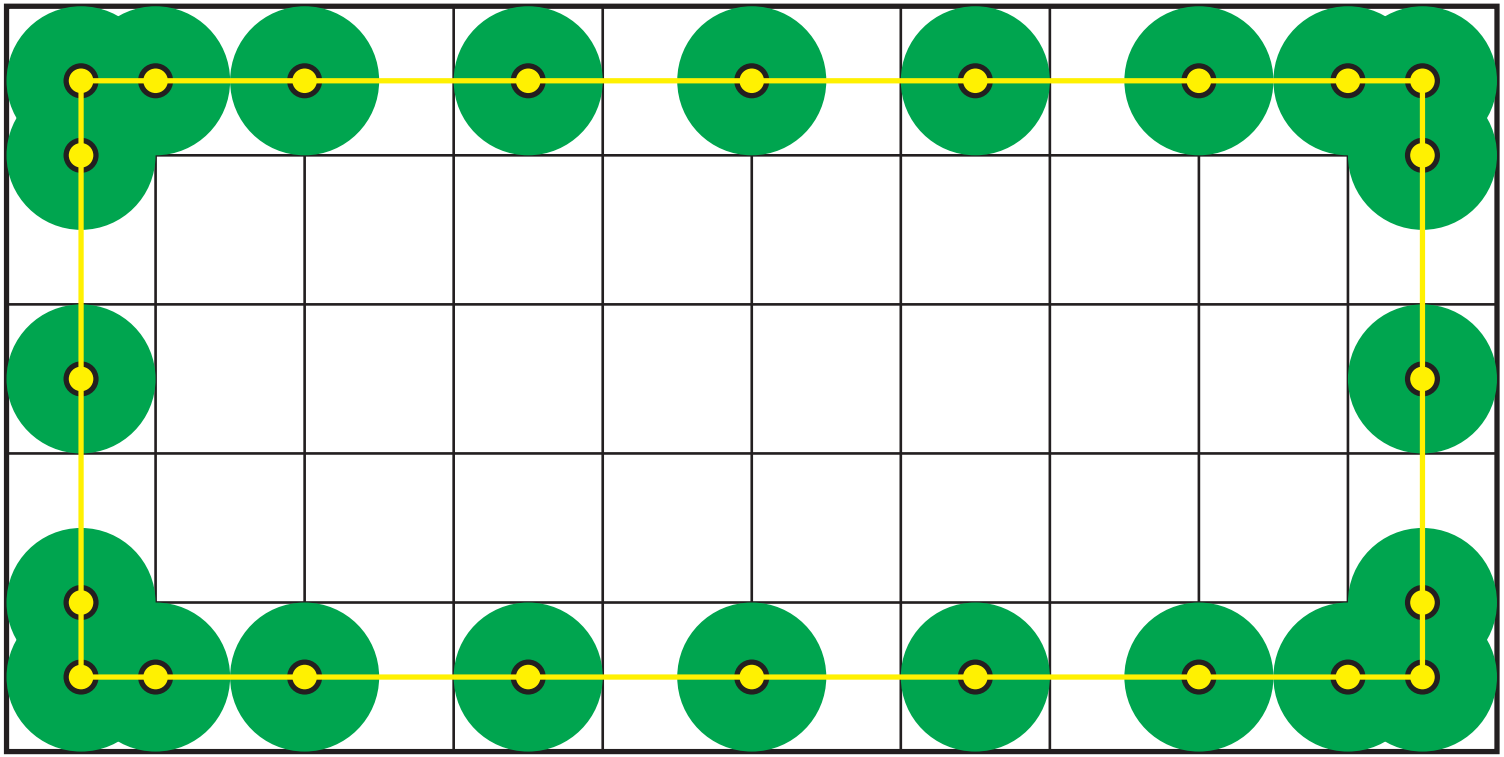
円形移動ロボット
半径 0.5m　中心の座標 (x, y)

移動ロボットの経路計画



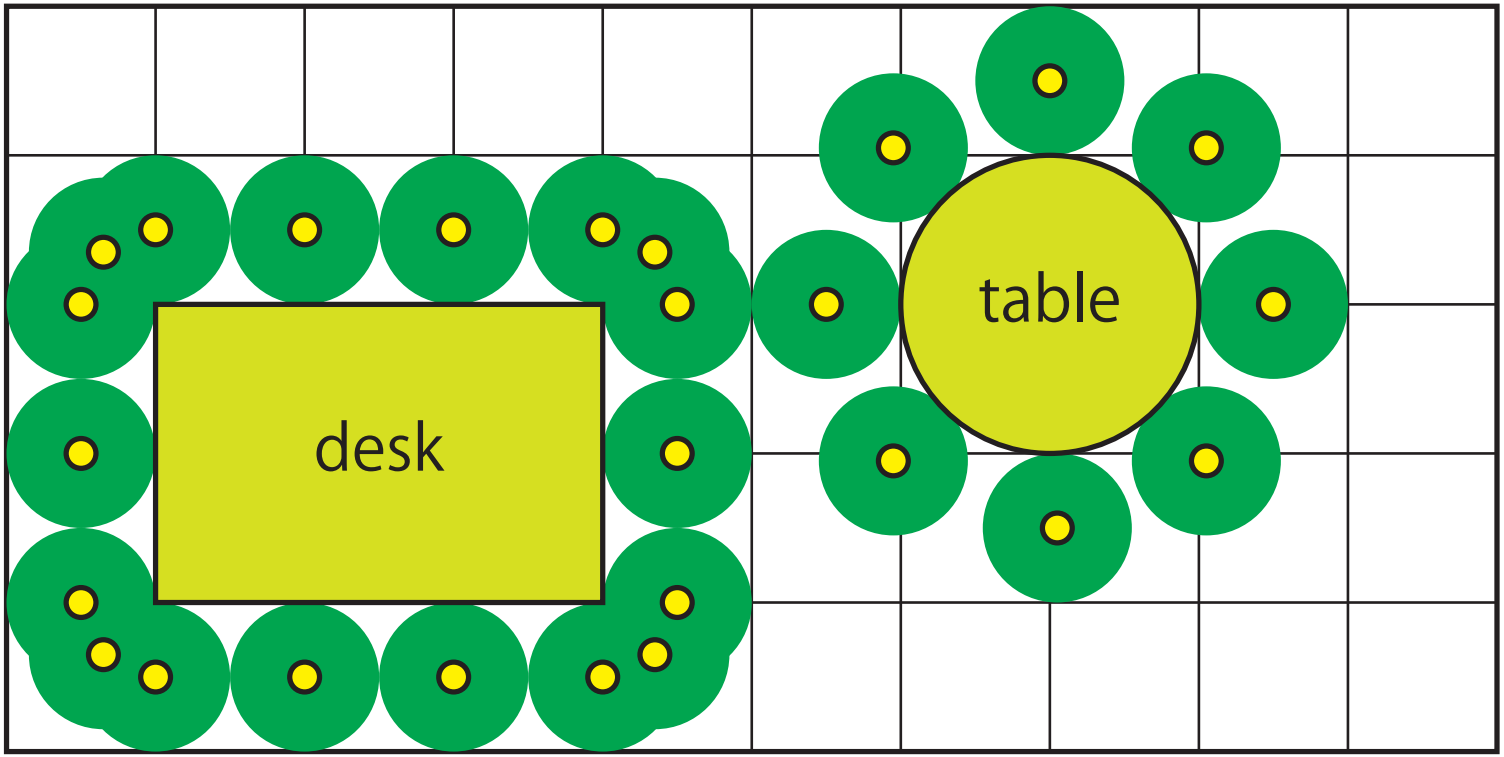
壁に沿ってロボットを動かす

移動ロボットの経路計画



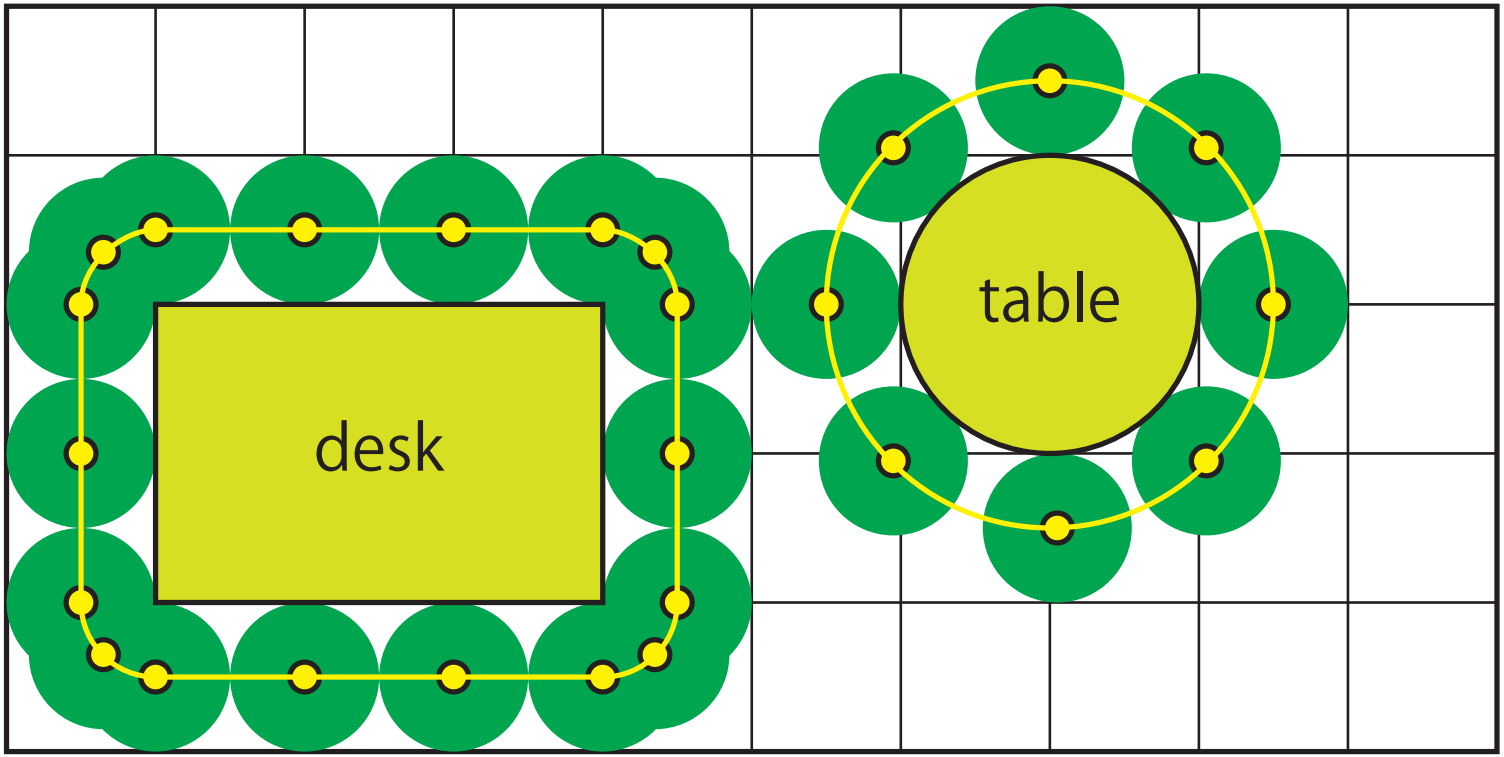
壁に沿ってロボットを動かす
ロボットの中心が描く軌跡

移動ロボットの経路計画



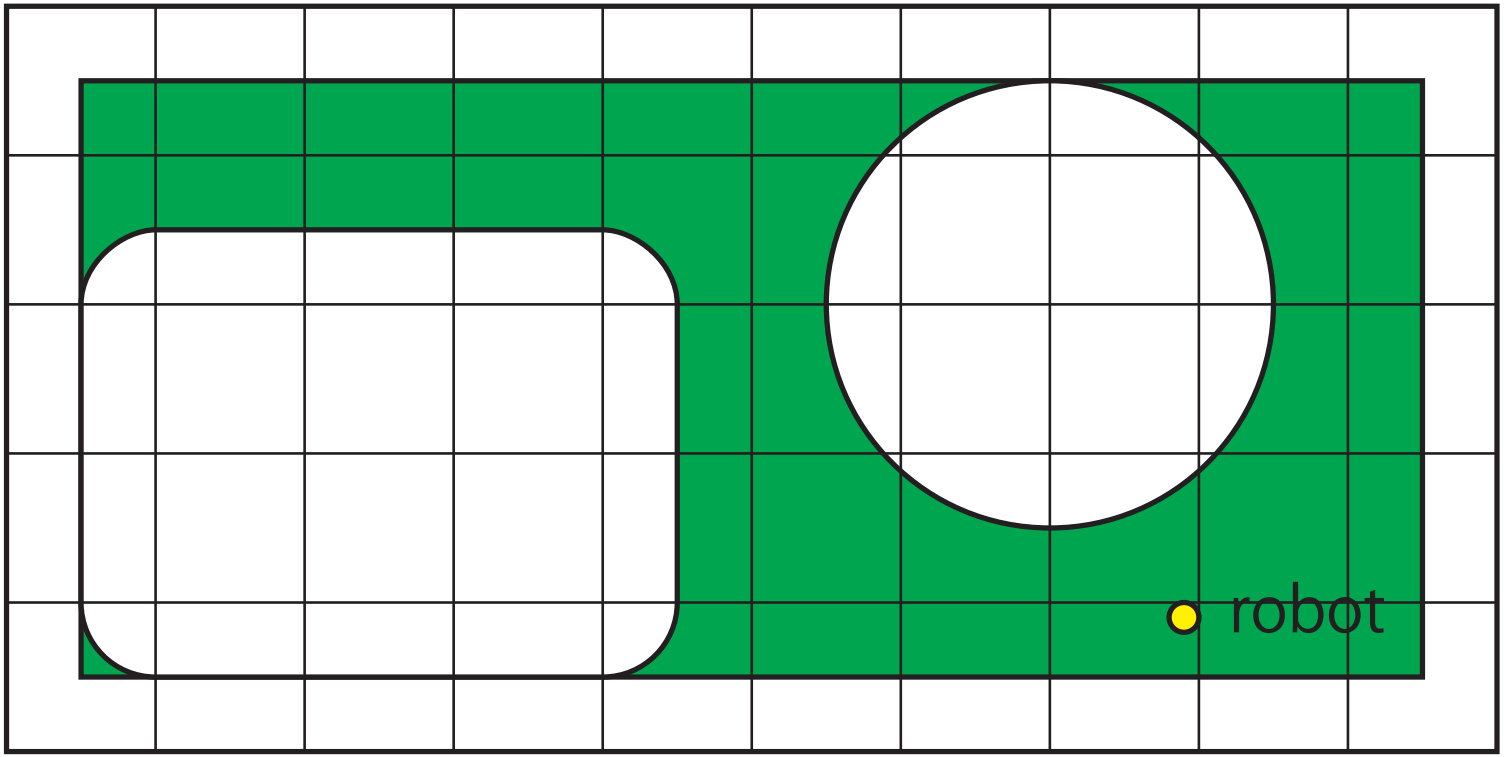
障害物（机，テーブル）に沿ってロボットを動かす

移動ロボットの経路計画



障害物（机，テーブル）に沿ってロボットを動かす
ロボットの中心が描く軌跡

移動ロボットの経路計画



移動ロボットの中心が存在しうる領域

$\longrightarrow$　移動ロボットを点とみなして経路を計画する

配位空間 (configuration space, C-space)

まとめ

乱数

一様乱数　正規乱数
モンテカルロ法

移動ロボットの経路計画

PRM (Probabilistic Roadmaps)
配位空間 (configuration space, C-space)

レポート (MATLAB Grader)

MATLAB grader 「確率的手法」
締切：12 月 1 日（月曜）午前 1 時