

知能科学：チューリングマシン

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

講義の流れ

- ① チューリング
- ② チューリングマシン
- ③ 動作例
 - 加算
 - 数える
 - 最大公約数
- ④ チャーチの提案
- ⑤ 停止問題
- ⑥ まとめ

チューリング Alan Turing (1912 – 1954)

- イギリスの数学者
- チューリングマシン (Turing machine) の考案者
- チューリングテスト (Turing test) の考案者
- 暗号解読への貢献 (ボンベによるエニグマの解読. ボンベはレイェフスキ (ポーランド) の発明)
- チューリング賞 (計算機科学分野のノーベル賞)
- 映画「イミテーション・ゲーム」
- 2019 年 英国 50 ポンド札の肖像に選ばれる
(札は 2021 年より流通)

チューリング Alan Turing (1912 – 1954)

Guardian

Alan Turing to feature on new £50 banknote

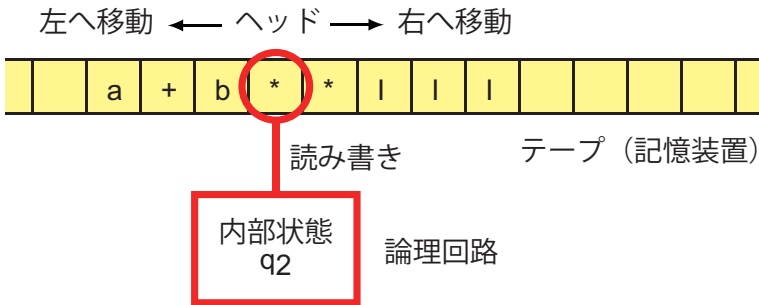
Mathematician who cracked Enigma code was persecuted for his homosexuality in 1950s

The father of modern computing: Alan Turing's legacy



チューリングマシン

コンピュータのモデルとなる仮想的な機械
(提唱 1936 年 コンピュータの実現より先)



チューリングマシン

アルファベット 有限個 (たとえば a, b, c, 0, 1)
空白を Λ で表す
ヘッドの移動 L(left, 左), R(right, 右), F(fix, 静止)
内部状態 有限個 (たとえば q_0, q_1, q_2, q_3)
停止を $\blacksquare$ で表す

入力アルファベット テープから読み込む
出力アルファベット テープに書き込む

入力アルファベット
現在の状態



出力アルファベット
ヘッドの移動
次の状態

機能表

機能表

入力
アルファベット

現在の状態

	q_0	q_1	q_2
I	$\wedge R q_2$	$I L q_1$	$I R q_2$
$\wedge$	$\wedge R q_0$	$\wedge R q_0$	$I F q_1$
*	$\wedge !$	$* L q_1$	$* R q_2$

$* L q_1$

出力アルファベット

ヘッドの移動

次の状態

機能表 (省略形)

入力
アルファ
ベット

現在の状態

	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda!$	L	R

*L q_1

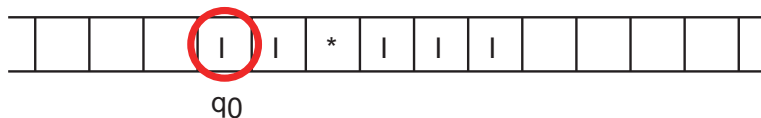
出力アルファベット

ヘッドの移動

次の状態

動作例

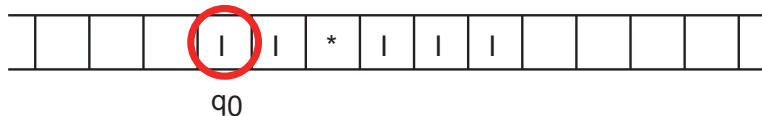
初期状態



	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例

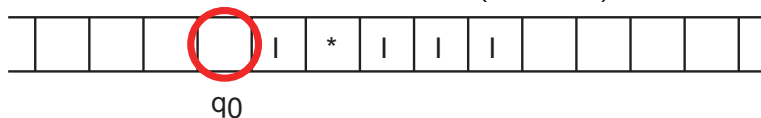
初期状態



	q_0	q_1	q_2
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例

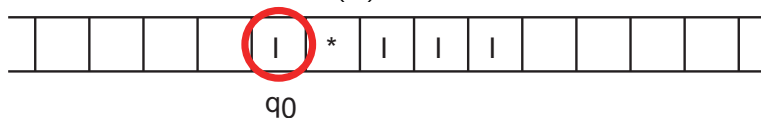
テープの文字を書き換える (Λ : 空白)



	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例

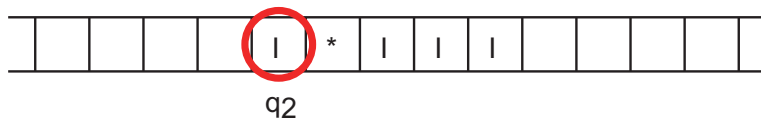
ヘッドの移動 (R)



	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda !$	L	R

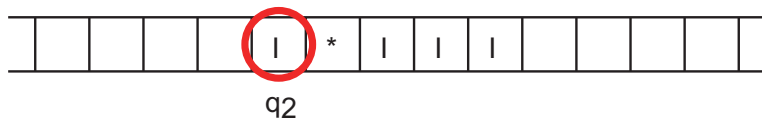
動作例

状態遷移



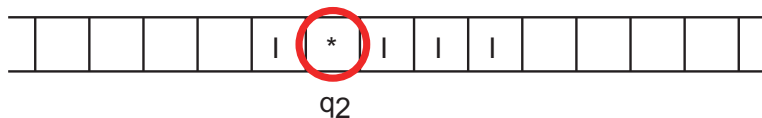
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda !$	L	R

動作例



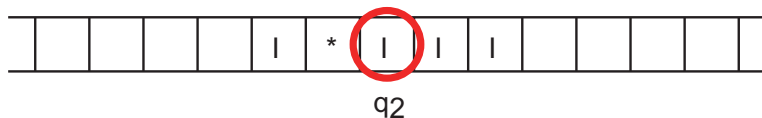
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



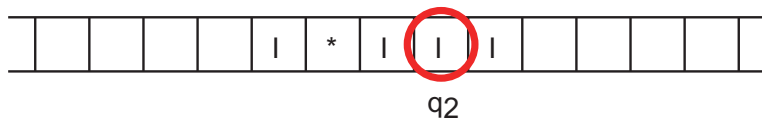
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



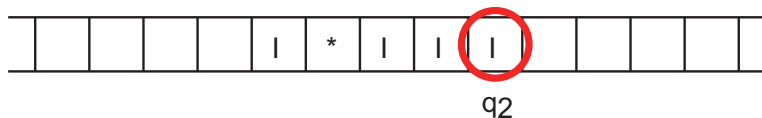
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



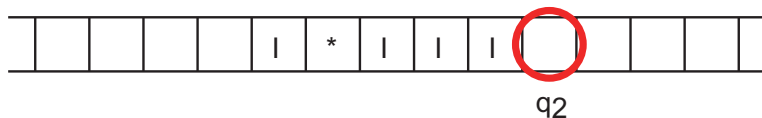
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



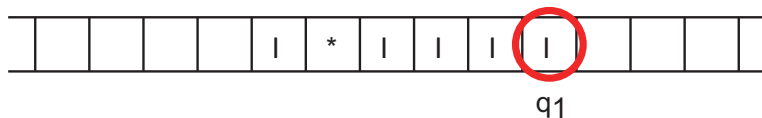
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



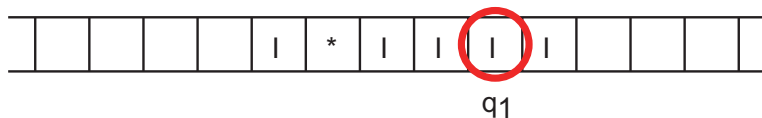
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



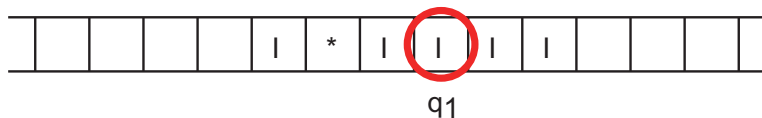
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



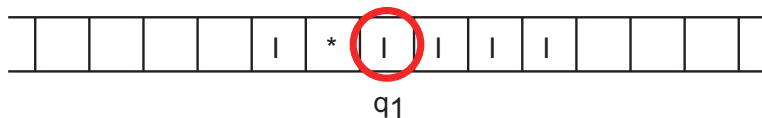
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda !$	L	R

動作例



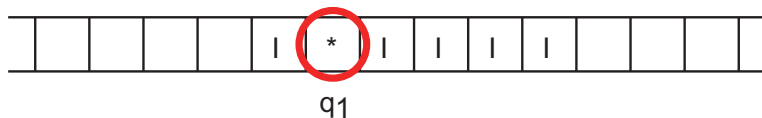
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



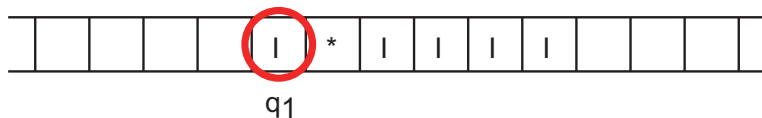
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



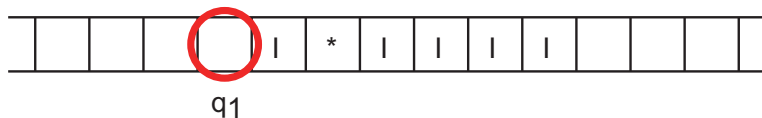
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



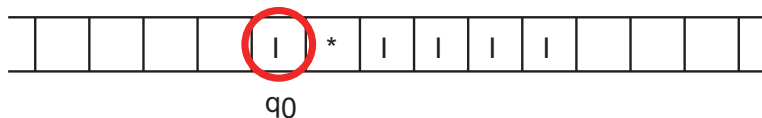
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



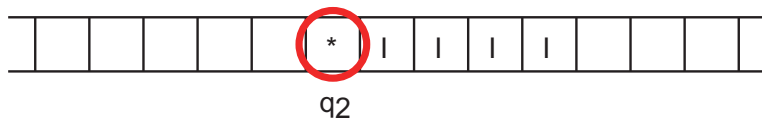
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



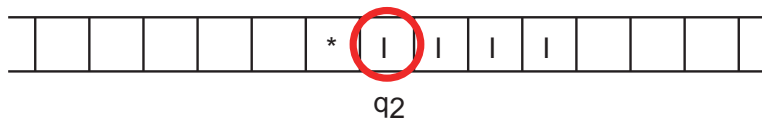
	q_0	q_1	q_2
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



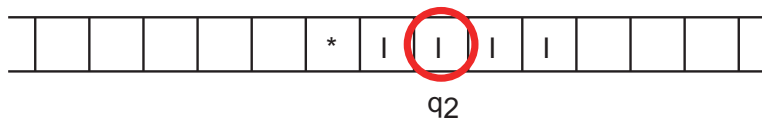
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda !$	L	R

動作例



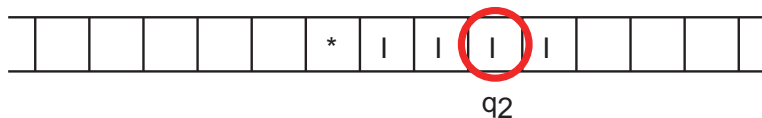
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



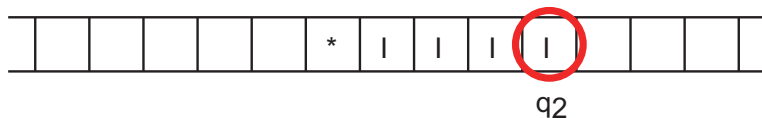
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



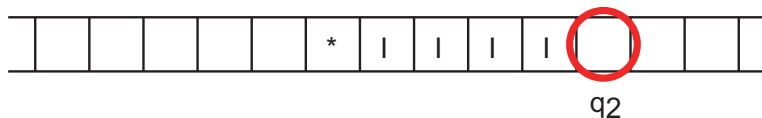
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda !$	L	R

動作例



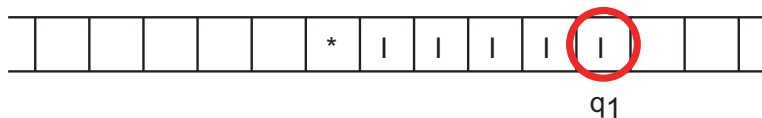
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda !$	L	R

動作例



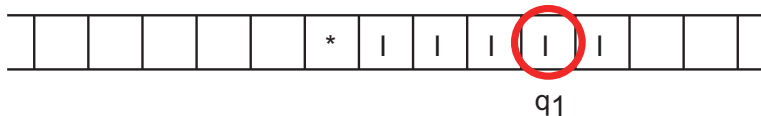
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



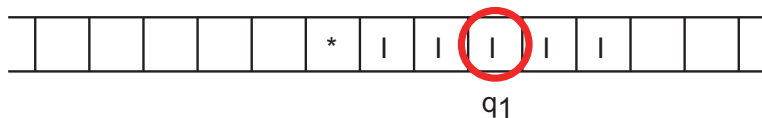
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



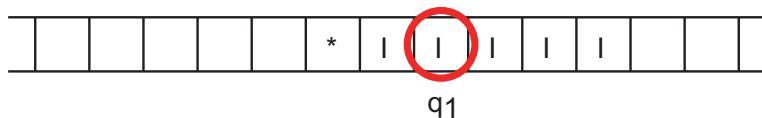
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



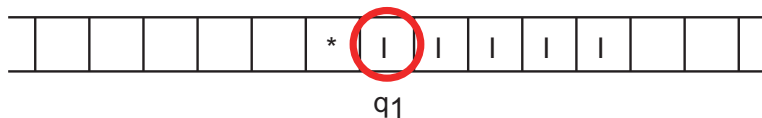
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda !$	L	R

動作例



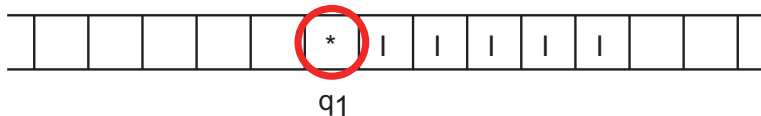
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



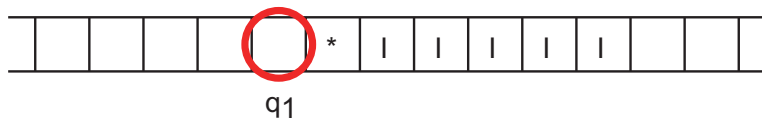
	q_0	q_1	q_2
	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	q_1
*	$\wedge !$	L	R

動作例



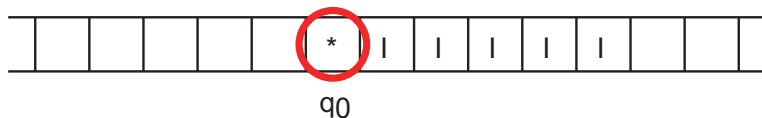
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



	q_0	q_1	q_2
$ $	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	$ q_1$
$*$	$\Lambda !$	L	R

動作例



	q_0	q_1	q_2
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I q_1
*	$\wedge!$	L	R

動作例

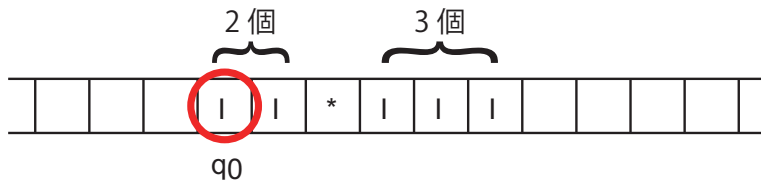
停止！



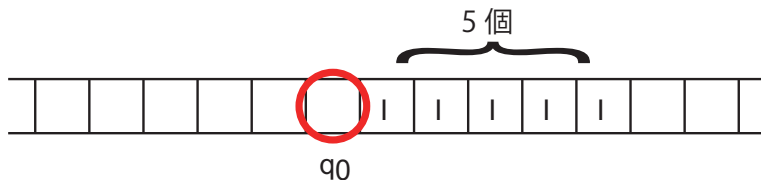
	q_0	q_1	q_2
I	$\wedge R q_2$	L	R
$\wedge$	R	$R q_0$	I q_1
*	$\wedge!$	L	R

動作例

初期状態



停止状態



加算を計算する機能表

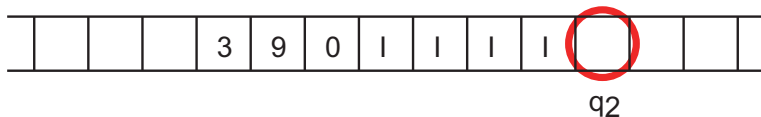
個数を数えて十進数で表す

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
2	3 q_2	!	R
3	4 q_2	!	R
4	5 q_2	!	R
5	6 q_2	!	R

	q_0	q_1	q_2
6	7 q_2	!	R
7	8 q_2	!	R
8	9 q_2	!	R
9	0L	!	R
Λ	1 q_2	!	Lq_1
I	L	ΛLq_0	R

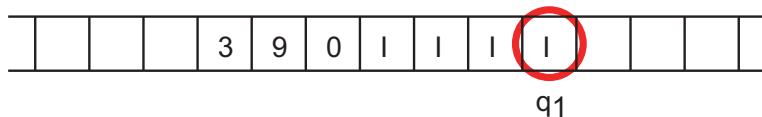
個数を数えて十進数で表す

初期状態



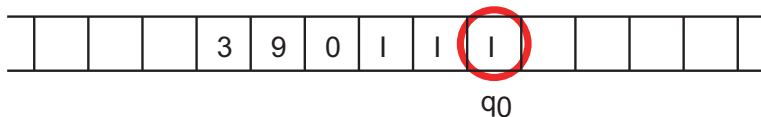
	q_0	q_1	q_2
Λ	1 q_2	!	Lq_1

個数を数えて十進数で表す



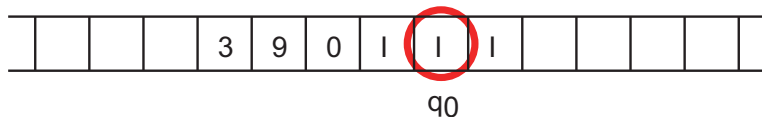
	q_0	q_1	q_2
1	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



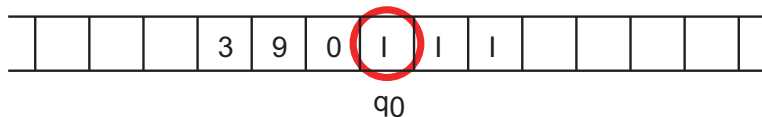
	q_0	q_1	q_2
1	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



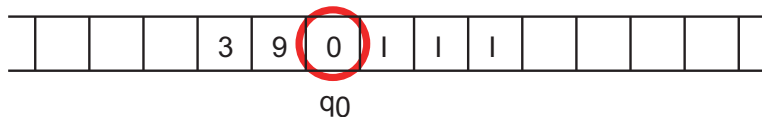
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



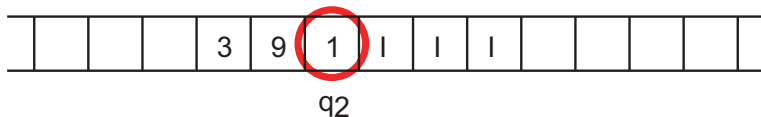
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



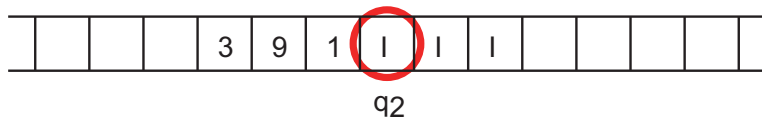
	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R

個数を数えて十進数で表す



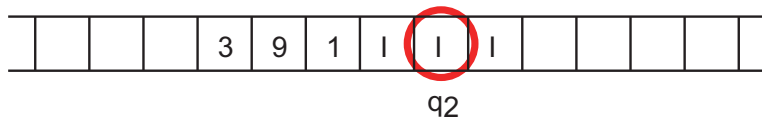
	q_0	q_1	q_2
1	2 q_2	!	R

個数を数えて十進数で表す



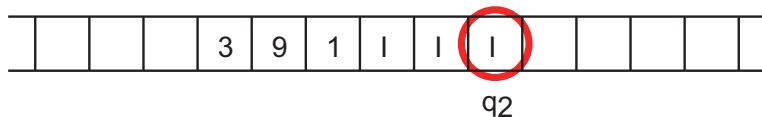
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



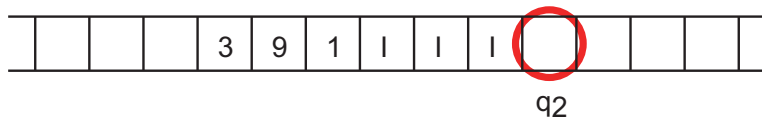
	q_0	q_1	q_2
	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



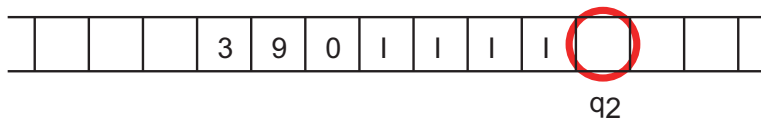
	q_0	q_1	q_2
	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す

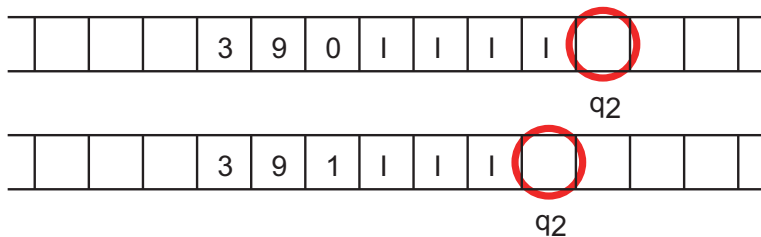


	q_0	q_1	q_2
Λ	1 q_2	!	Lq_1

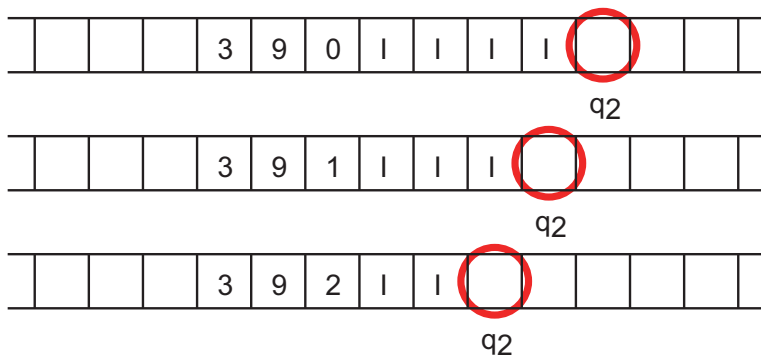
個数を数えて十進数で表す



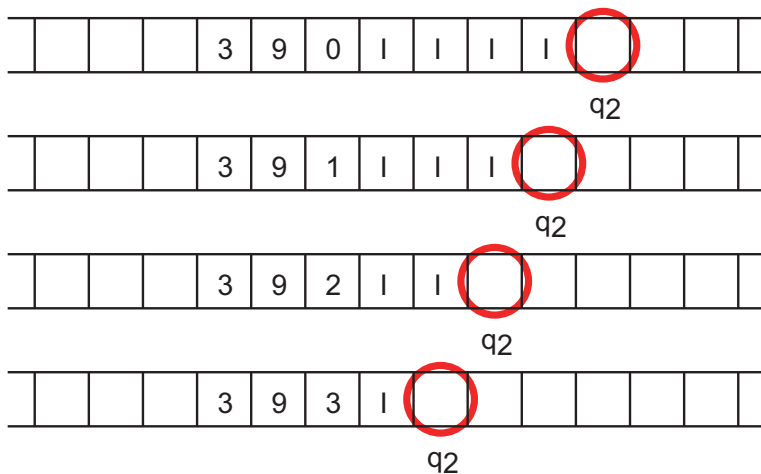
個数を数えて十進数で表す



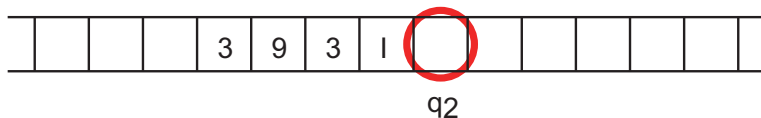
個数を数えて十進数で表す



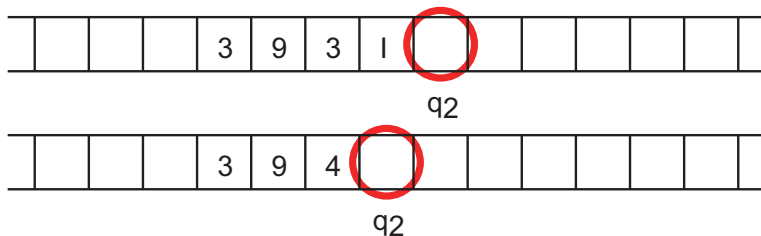
個数を数えて十進数で表す



個数を数えて十進数で表す



個数を数えて十進数で表す



個数を数えて十進数で表す



q2



q2



q1

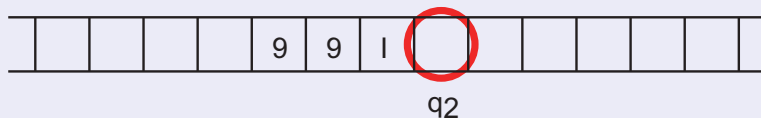
3 9 |

4 |

個数を数えて十進数で表す

問題

初期状態



から最終状態



への過程を記せ

ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

$$2 - 2 = 0$$

ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

$$2 - 2 = 0$$

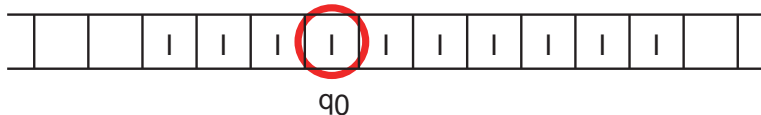
最大公約数は 2

ユークリッドの互除法の機能表

	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha \ q_1$	$\beta \ q_0$	Rq_0	Lq_0
Λ	Rq_3	Lq_2	Rq_0	!
α	L	R	IL	ΛR
β	L	R	ΛL	IR

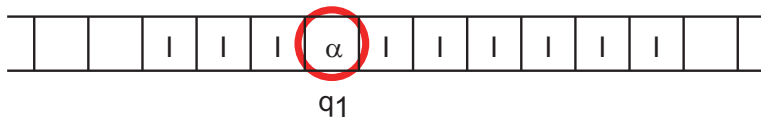
計算過程

4 と 6 の差を計算



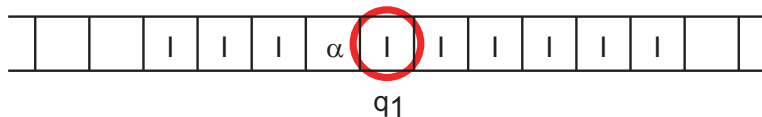
	q_0	q_1	q_2	q_3
	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



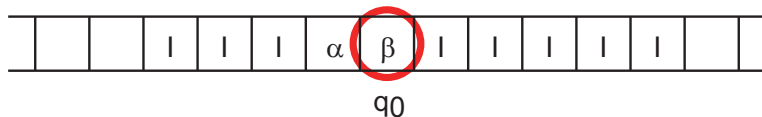
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



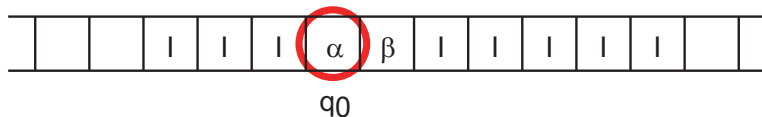
	q_0	q_1	q_2	q_3
	$\alpha \ q_1$	$\beta \ q_0$	Rq_0	Lq_0

計算過程



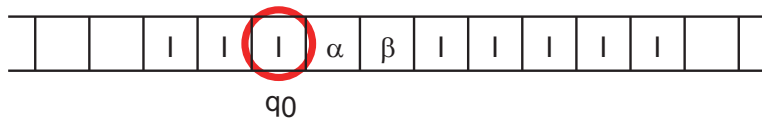
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	IR

計算過程



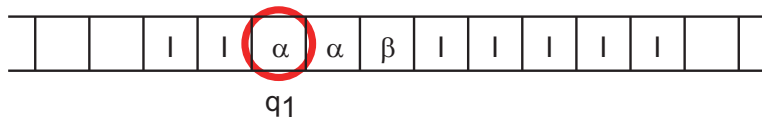
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



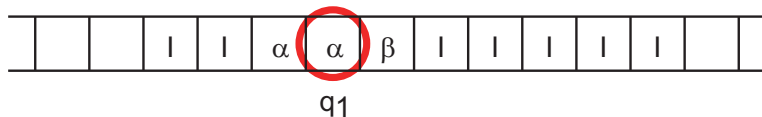
	q_0	q_1	q_2	q_3
	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



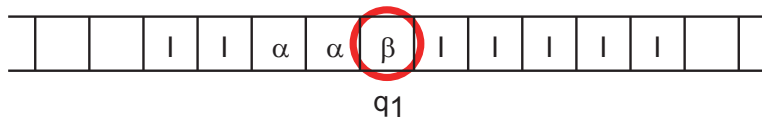
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



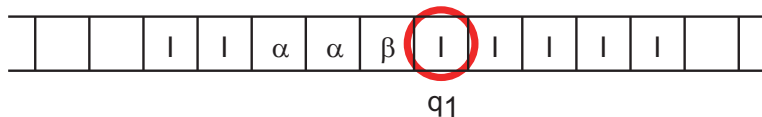
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



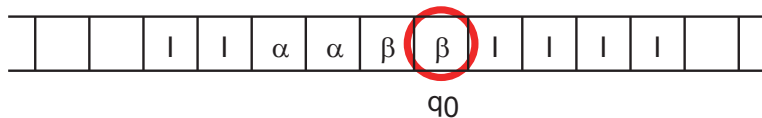
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge$ L	IR

計算過程



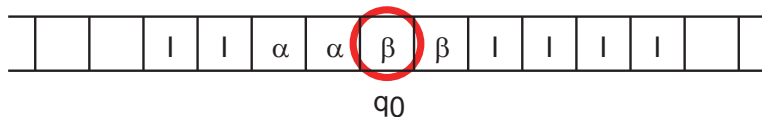
	q_0	q_1	q_2	q_3
	$\alpha \ q_1$	$\beta \ q_0$	Rq_0	Lq_0

計算過程



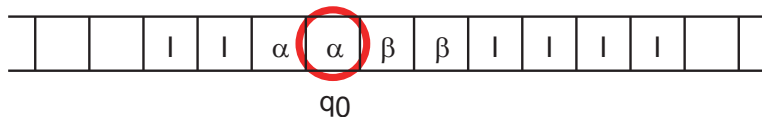
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	IR

計算過程



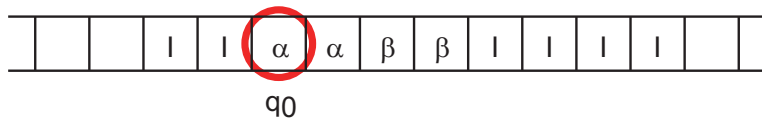
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	IR

計算過程



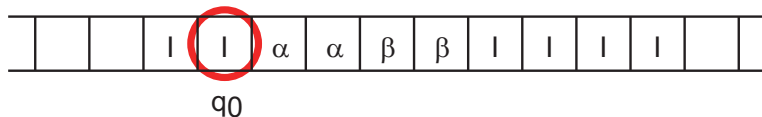
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



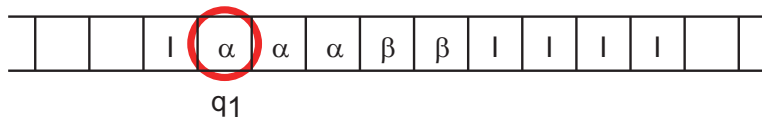
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



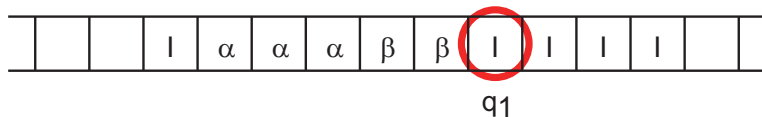
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



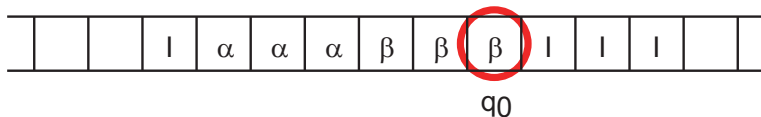
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



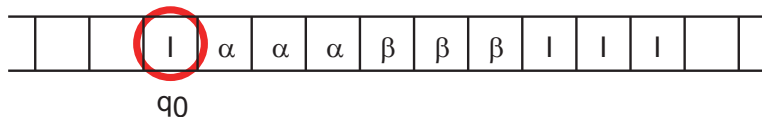
	q_0	q_1	q_2	q_3
	$\alpha \ q_1$	$\beta \ q_0$	Rq_0	Lq_0

計算過程



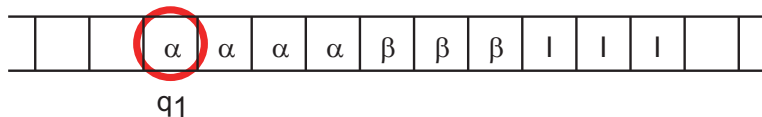
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	$I R$

計算過程



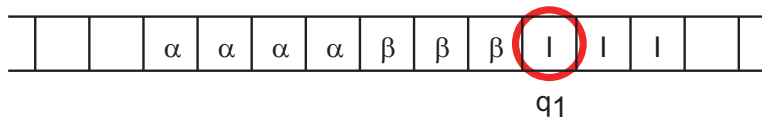
	q_0	q_1	q_2	q_3
1	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



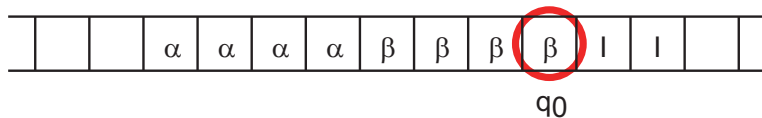
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



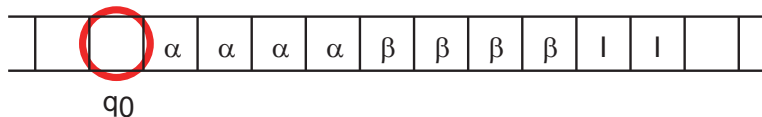
	q_0	q_1	q_2	q_3
	$\alpha \ q_1$	$\beta \ q_0$	Rq_0	Lq_0

計算過程



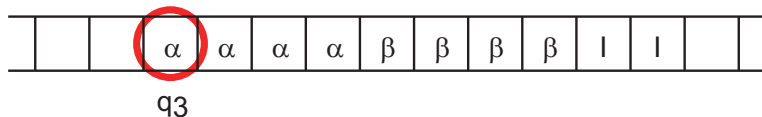
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	$\mid R$

計算過程



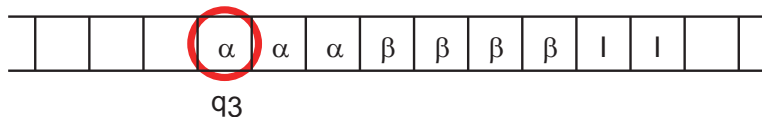
	q_0	q_1	q_2	q_3
Λ	Rq_3	Lq_2	Rq_0	$!$

計算過程



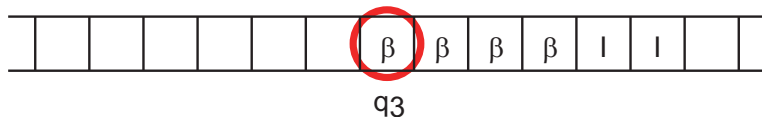
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	AR

計算過程



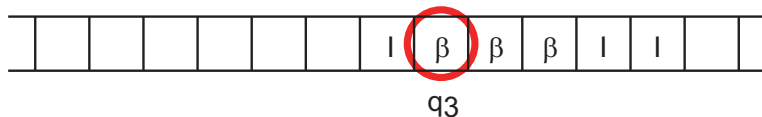
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	AR

計算過程



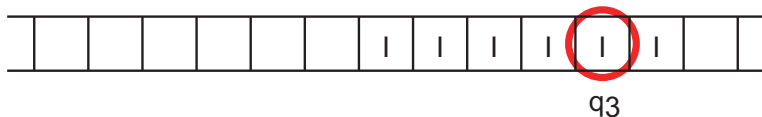
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	IR

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge$ L	IR

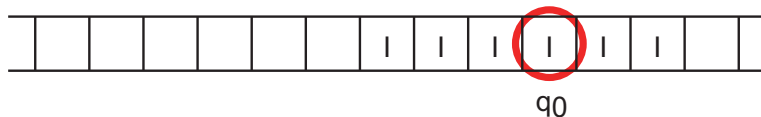
計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
l	$\alpha \ q_1$	$\beta \ q_0$	Rq_0	Lq_0

計算過程

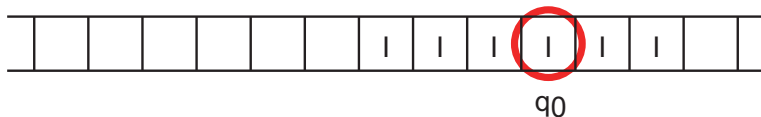
計算 $6 - 4 = 2$ の完了



	q_0	q_1	q_2	q_3
	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

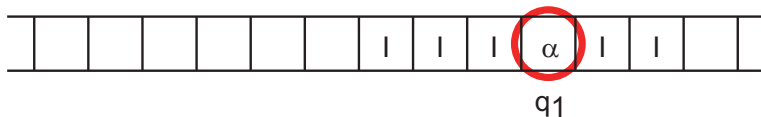
計算過程

4 と 2 の差を計算



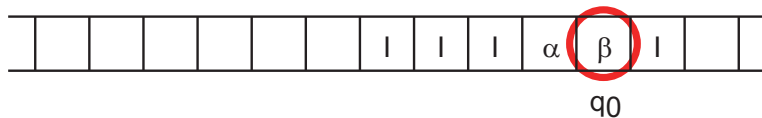
	q_0	q_1	q_2	q_3
	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



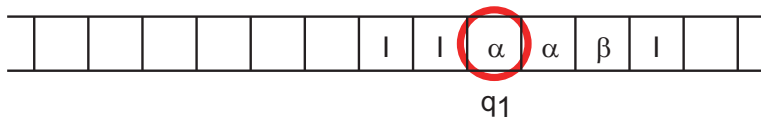
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



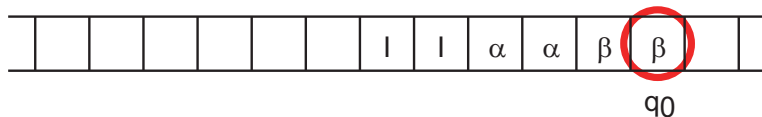
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	IR

計算過程



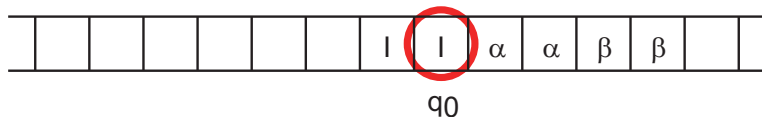
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



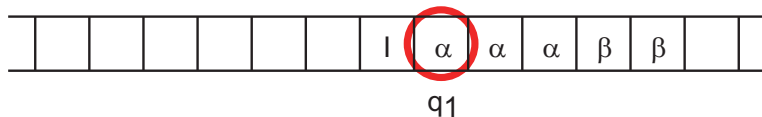
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	IR

計算過程



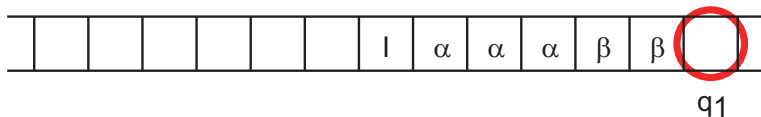
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



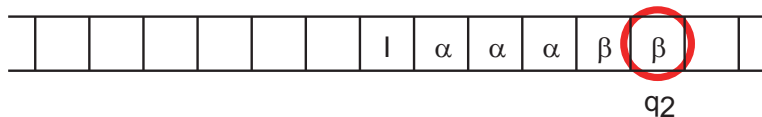
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



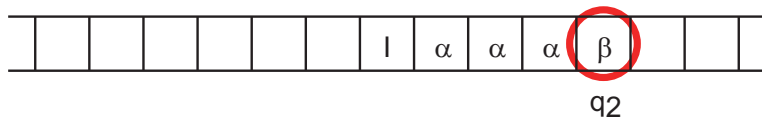
	q_0	q_1	q_2	q_3
Λ	Rq_3	Lq_2	Rq_0	$!$

計算過程



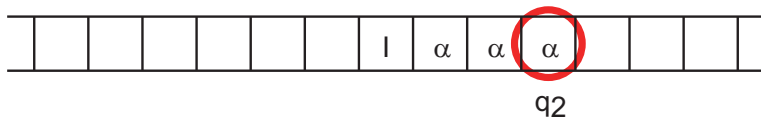
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge$ L	IR

計算過程



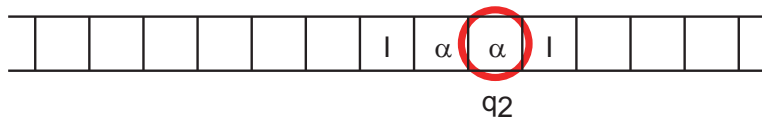
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge$ L	IR

計算過程



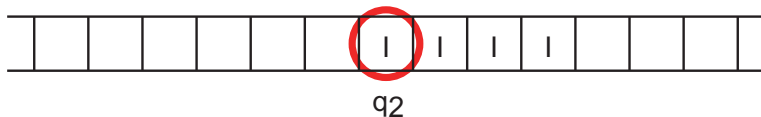
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

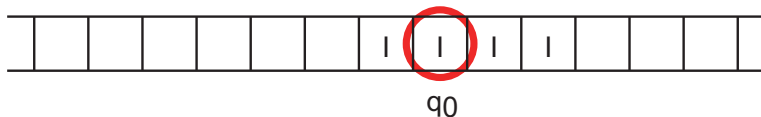
計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
	$\alpha \ q_1$	$\beta \ q_0$	Rq_0	Lq_0

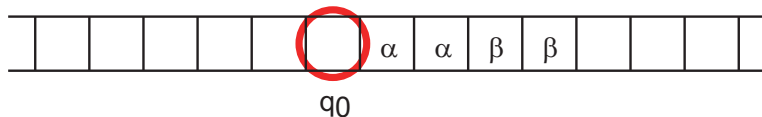
計算過程

計算 $4 - 2 = 2$ の完了 2 と 2 の差を計算



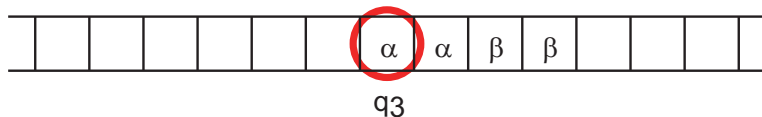
	q_0	q_1	q_2	q_3
	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
Λ	Rq_3	Lq_2	Rq_0	$!$

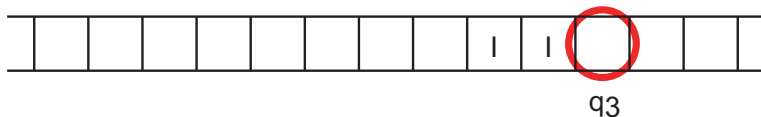
計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	AR

計算過程

計算 $2 - 2 = 0$ の完了 停止!



	q_0	q_1	q_2	q_3
Λ	Rq_3	Lq_2	Rq_0	!

チャーチの提案

チューリングマシン = コンピュータ

機能表 = プログラム = アルゴリズム

チューリングマシンが停止することが条件

停止問題とは

停止 アルゴリズムの条件

アルゴリズム＝チューリングマシンの機能表

停止するか否かを判定するチューリングマシン

入力 チューリングマシンの機能表

出力 停止する or 停止しない

停止問題とは

停止 アルゴリズムの条件

アルゴリズム＝チューリングマシンの機能表

停止するか否かを判定するチューリングマシン

入力 チューリングマシンの機能表

出力 停止する or 停止しない

X 存在しない

停止しない例

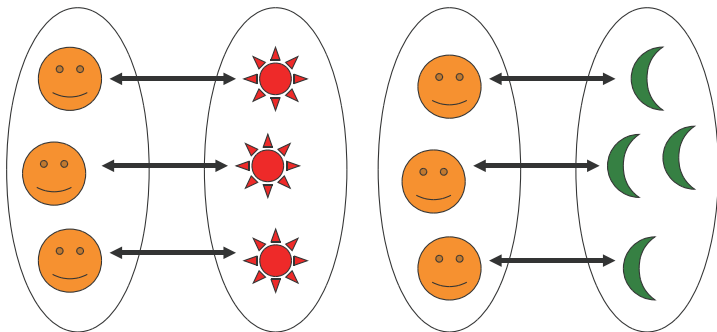
	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
2	3 q_2	!	R
3	4 q_2	!	R
4	5 q_2	!	R
5	6 q_2	!	R

	q_0	q_1	q_2
6	7 q_2	!	R
7	8 q_2	!	R
8	9 q_2	!	R
9	0L	!	R
Λ	1 q_2	!	Lq_0
I	L	ΛLq_0	R

無限を数える

自然数
偶数
どちらが多いか？

一対一対応が可能ならば個数は等しい



自然数と偶数

自然数		偶数
1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	6
4	$\longleftrightarrow$	8
5	$\longleftrightarrow$	10
6	$\longleftrightarrow$	12
7	$\longleftrightarrow$	14
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

二つの無限集合で
一対一対応が可能



同じ濃度を持つ

自然数と偶数は同じ濃度

自然数と実数 $[0, 1)$

一対一対応が可能と仮定

自然数		実数
1	$\iff$	0.2332988076...
2	$\iff$	0.3142592650...
3	$\iff$	0.5000000000...
4	$\iff$	0.0100100200...
5	$\iff$	0.7777777777...
6	$\iff$	0.4587009871...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

自然数と実数 $[0, 1)$

一対一対応が可能と仮定

自然数		実数
1	$\iff$	0.2332988076...
2	$\iff$	0.3142592650...
3	$\iff$	0.5000000000...
4	$\iff$	0.0100100200...
5	$\iff$	0.7777777777...
6	$\iff$	0.4587009871...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

自然数と実数 $[0, 1)$

一対一対応が可能と仮定

自然数		実数
1	$\iff$	0.2332988076...
2	$\iff$	0.3142592650...
3	$\iff$	0.5000000000...
4	$\iff$	0.0100100200...
5	$\iff$	0.7777777777...
6	$\iff$	0.4587009871...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

どの自然数にも対応しない実数 $0.321181\dots$ が存在

自然数と実数 $[0, 1)$

一対一対応が可能と仮定

自然数		実数
1	$\iff$	0. 2 332988076...
2	$\iff$	0.3 1 42592650...
3	$\iff$	0.50 0 0000000...
4	$\iff$	0.010 0 100200...
5	$\iff$	0.7777 7 77777...
6	$\iff$	0.45870 0 9871...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

どの自然数にも対応しない実数 $0.321181\dots$ が存在
仮定は誤り 一対一対応は不可能

自然数と実数 $[0, 1)$

実数は自然数と一対一対応させることができない（実数が余る）



実数は自然数より濃度が濃い

対角線論法

プログラム = 文字列

機能表 = 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
$\vdots$		$\vdots$	
$\wedge$	1 q_2	!	L q_1
!	L	$\wedge$ L q_0	R

$\Longleftrightarrow$

12,3;0,1, $\dots$, $\wedge$,!; q_0,q_1,q_2 ;1 q_2 ,!,R;2 q_2 ,!,R; $\dots$ 1 q_2 ,!,L q_1 ;L, $\wedge$ L q_0 ,R;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;
内部状態; 遷移則

プログラム = 文字列

機能表 = 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
$\vdots$		$\vdots$	
$\wedge$	1 q_2	!	L q_1
I	L	$\wedge$ L q_0	R

$\Longleftrightarrow$

12,3;0,1, $\dots$, $\wedge$,I; q_0,q_1,q_2 ;1 q_2 ,!,R;2 q_2 ,!,R; $\dots$ 1 q_2 ,!,L q_1 ;L, $\wedge$ L q_0 ,R;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;
内部状態; 遷移則

プログラム = 文字列

機能表 = 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
$\vdots$		$\vdots$	
$\wedge$	1 q_2	!	L q_1
I	L	$\wedge$ L q_0	R

$\Longleftrightarrow$

12,3;**0,1, $\dots$, $\wedge$,I**; q_0,q_1,q_2 ;1 q_2 ,!,R;2 q_2 ,!,R; $\dots$ 1 q_2 ,!,L q_1 ;L, $\wedge$ L q_0 ,R;

アルファベットと内部状態の個数; **アルファベット**;
内部状態; 遷移則

プログラム = 文字列

機能表 = 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
$\vdots$		$\vdots$	
$\wedge$	1 q_2	!	L q_1
!	L	$\wedge$ L q_0	R



12,3;0,1, $\dots$, $\wedge$,!; q_0, q_1, q_2 ;1 $q_2, !, R$;2 $q_2, !, R$; $\dots$ 1 $q_2, !, L q_1$;L, $\wedge$ L q_0, R ;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;

内部状態; 遷移則

プログラム = 文字列

機能表 = 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
$\vdots$		$\vdots$	
$\wedge$	1 q_2	!	L q_1
I	L	$\wedge$ L q_0	R



12,3;0,1, $\dots$, $\wedge$,I; q_0,q_1,q_2 ;1 q_2 ,!,R;2 q_2 ,!,R; $\dots$ 1 q_2 ,!,L q_1 ;L, $\wedge$ L q_0 ,R;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;
内部状態; 遷移則

プログラム＝文字列

機能表: 文字列 (長さ有限)



テープの初期文字列 **TM** として
チューリングマシンへ入力可能

プログラム＝文字列

文字列と機能表の濃度

文字列 $\iff$ 自然数

文字列 390IIII



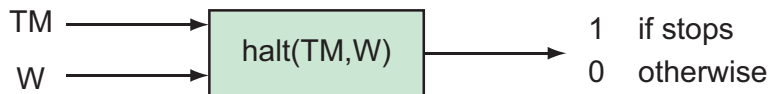
文字コード 0x33 0x39 0x30 0x49 0x49 0x49 0x49
16 進数 333930494949 : 自然数

機能表 $\iff$ 自然数

機能表 $\iff$ 文字列

文字列 $\iff$ 自然数

停止性判定チューリングマシン



入力 チューリングマシンの機能表 TM
テープの文字列 W

出力 1 TM に W を入力すると停止
 0 それ以外

仮定

停止性チューリングマシン $\text{halt}(\text{TM}, W)$ が存在する

停止性判定チューリングマシンの出力

テープの文字列

機能表

	W1	W2	W3	W4	...
TM1	1	1	1	1	...
TM2	1	0	0	1	...
TM3	0	1	0	1	...
TM4	1	1	1	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

1: 停止 0: 停止しない

停止性判定チューリングマシンの出力

テープの文字列

	W1	W2	W3	W4	...
TM1	1	1	1	1	...
TM2	1	0	0	1	...
TM3	0	1	0	1	...
TM4	1	1	1	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

機能表

1: 停止 0: 停止しない

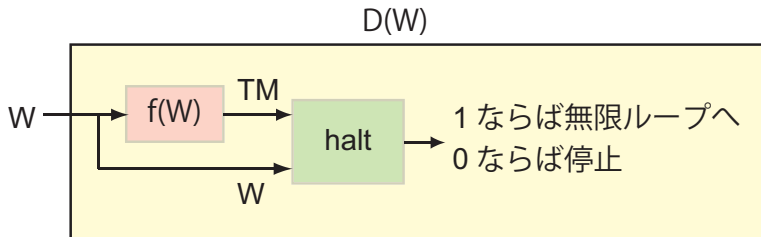
関数 $f(W)$

$W1$	$\iff$	$TM1$	$\implies$	$f(W1)=TM1$
$W2$	$\iff$	$TM2$		$f(W2)=TM2$
$W3$	$\iff$	$TM3$		$f(W3)=TM3$
$W4$	$\iff$	$TM4$		$f(W4)=TM4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

一対一対応可能
同じ濃度

関数を定義できる

チューリングマシン $D(W)$



入力 テープの文字列 W

出力 停止あるいは無限ループ

チューリングマシン $\text{halt}(TM, W)$ が存在するならば
チューリングマシン $D(W)$ は存在する

チューリングマシン $D(W)$

$\text{halt}(\text{TM1}, W1)=1$

$\text{halt}(\text{TM2}, W2)=0$

$\text{halt}(\text{TM3}, W3)=0$

$\text{halt}(\text{TM4}, W4)=1$



$\vdots$



チューリングマシン $D(W)$

$\text{halt}(\text{TM1}, W1)=1$

$\text{halt}(\text{TM2}, W2)=0$

$\text{halt}(\text{TM3}, W3)=0$

$\text{halt}(\text{TM4}, W4)=1$

$\vdots$



$D(W1)$ 停止しない

$D(W2)$ 停止

$D(W3)$ 停止

$D(W4)$ 停止しない

$\vdots$

$\vdots$

チューリングマシン $D(W)$

$\text{halt}(\text{TM1}, W1)=1$		$D(W1)$	停止しない
$\text{halt}(\text{TM2}, W2)=0$		$D(W2)$	停止
$\text{halt}(\text{TM3}, W3)=0$	$\Rightarrow$	$D(W3)$	停止
$\text{halt}(\text{TM4}, W4)=1$		$D(W4)$	停止しない
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$



$\text{TM1}(W1)$	停止
$\text{TM2}(W2)$	停止しない
$\text{TM3}(W3)$	停止しない
$\text{TM4}(W4)$	停止
$\vdots$	$\vdots$

チューリングマシン $D(W)$

$\text{halt}(\text{TM1}, W1)=1$		$D(W1)$	停止しない
$\text{halt}(\text{TM2}, W2)=0$		$D(W2)$	停止
$\text{halt}(\text{TM3}, W3)=0$	$\Rightarrow$	$D(W3)$	停止
$\text{halt}(\text{TM4}, W4)=1$		$D(W4)$	停止しない
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$



$\text{TM1}(W1)$	停止	$D \neq \text{TM1}$
$\text{TM2}(W2)$	停止しない	$D \neq \text{TM2}$
$\text{TM3}(W3)$	停止しない	$D \neq \text{TM3}$
$\text{TM4}(W4)$	停止	$D \neq \text{TM4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

チューリングマシン $D(W)$

$D \neq TM1$

$D \neq TM2$

$D \neq TM3$

$D \neq TM4$

$\vdots$



D は存在しない *i.e.* halt は存在しない

まとめ

コンピュータの原理

コンピュータ = チューリングマシン
アルゴリズム = プログラム = 機能表

停止問題

チューリングマシンでは解くことができない
コンピュータでは解くことができない

レポート

下記の問題に答え，pdf ファイルで moodle+R に提出する．

ファイル名：学籍番号（11桁半角数字）名前（空白なし）.pdf

例えば 12345678901 平井慎一.pdf

12345678901HiraiShinichi.pdf

締切：10月19日（月曜）午前1時

(1) 自然数 $1, 2, 3, \dots$ と整数 $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ が一対一対応できることを示せ．

(2) 実数 $[0, 1)$ と二次元空間 $[0, 1) \times [0, 1)$ が一対一対応できることを示せ．

$$[0, 1) \times [0, 1) = \{(x, y) \mid x \in [0, 1), y \in [0, 1)\}$$

付録：一対一対応

以下の説明は正しいか.

偶数 n に対して, 一つの自然数 n が対応する.
したがって, 偶数と自然数は一対一対応する.

偶数		自然数
		1
2	$\implies$	2
		3
4	$\implies$	4
		5
6	$\implies$	6
		7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

付録：一対一対応

以下の説明は正しいか.

自然数 k に対して, 一つの偶数 $4k$ が対応する.
したがって, 自然数と偶数は一対一対応する.

偶数		自然数
2		
4	$\longleftarrow$	1
6		
8	$\longleftarrow$	2
10		
12	$\longleftarrow$	3
14		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

付録：一対一対応

以下の説明は正しいか.

偶数 n に対して, 一つの自然数 n が対応する.
自然数 k に対して, 一つの偶数 $4k$ が対応する.
したがって, 偶数と自然数は一対一対応する.

偶数の集合を E , 自然数の集合を N で表す.
任意の $n \in E$ に対して, $n \in N$ が対応する.
これより, $E \subset N$ である.
任意の $k \in N$ に対して, $4k \in E$ が対応する.
これより, $N \subset E$ である.
したがって, 集合 E と集合 N は一対一対応する.