

## 凸多面錐理論を用いたマニピュレーションの運動学と その把握および組立作業への応用<sup>†</sup>

平井 慎一\*・浅田 春比古\*・得丸 英勝\*

Kinematics of Manipulation Using the Theory of Polyhedral Convex  
Cones and Its Applications to Grasping and Assembly Operations

Shinichi HIRAI\*, Haruhiko ASADA\* and Hidekatsu TOKUMARU\*

A new approach to the kinematic analysis of object motion constrained by mechanical contacts is presented. In robotic manipulation, such as grasping and assembly, robots manipulate objects through mechanical contacts with the grasped object and with the environment. We need to understand the kinematic behavior of the object motion under the constraints by the mechanical contacts in order to find appropriate strategies for manipulation tasks.

In this paper, we first show that the constraints by mechanical contacts are generally described by a set of homogeneous linear inequalities. In task planning, it is often necessary for the planner to treat the complex inequalities. Thus, we develop an efficient mathematical tool based on the theory of polyhedral convex cones in order to treat the inequalities in a simple and systematic manner. Furthermore, we develop computation algorithms of the polyhedral convex cones in order to treat the inequalities on a computer. We apply the method to the planning of form-closure grasps, workpiece fixturing and hybrid position/force control. Several examples demonstrate the usefulness of the algorithms.

**Key Words:** robot manipulator, manipulation, kinematics, task planning, polyhedral convex cones

### 1. 緒 言

従来、ロボットの運動学では、ロボット内部のリン

ク機構の研究が中心であった。一方、把握や組立作業に代表されるマニピュレーションの分野では、ロボットが操作する対象物の運動を理解することが、中心的な課題とされている<sup>1)</sup>。特に、物体との機械的な接触によって拘束される物体の運動の理解は、把握や組立作業などの計画・制御問題に不可欠である。対象物の運動学的特性にもとづいて作業を計画すれば、より高度な作業の実現が期待できる。

マニピュレーションにおいてロボットは、物体との機械的な接触を通して、物体の運動を拘束し制御する。たとえば、ロボットハンドによる物体の把握においては、ロボットハンドの指を対象物に接触させ、対象物の運動を拘束することにより把握を行う<sup>2)</sup>。組立作業においては、部品の位置や姿勢の不確定性に対処するため、組立部品を相手部品に接触させ、接触面を参照面にして案内を行う<sup>3)</sup>。したがってマニピュレーションにおいては、接触によって拘束を受ける物体の運動を理解し、作業の計画や制御を行うことが基本となる。

ロボットアームのリンク機構では、ある方向の運動が拘束されているならば、その反対方向の運動も拘束されている。すなわち両側拘束であり、リンク機構の運動は、ある等式によって記述される。一方、ロボットと対象物の機械的な接触による拘束は、一方向にのみ拘束を与えるもので、反対方向には非接触となって拘束を与えない。すなわち片側拘束であり、物体の運動は、不等式によって記述される。たとえば、Asadaらは、部品を幾何学的に固定できる条件、および部品をフィクスチャの位置まで案内できる条件を、不等式で表わした<sup>4)</sup>。Rajanらは、摩擦のある接触を行う平面物体の運動を解析し、あるパターンの運動を行うために必要な力とモーメントの集合を、不等式を用いて

<sup>†</sup> 第30回自動制御連合講演会で発表(昭62・10)

\* 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

\* Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto  
(Received March 10, 1988)

(Revised July 11, 1988)

表わした<sup>5)</sup>。また高瀬らは、環境拘束による運動の強制停止問題を解き、瞬間回転中心がある種の不等式で表わされる領域内にあるとき、強制停止が可能なることを示した<sup>6)</sup>。

ロボットの作業を計画するためには、操作する対象物の運動を記述した、これらの不等式を扱う必要がある。しかしながら不等式は、等式とくらべると、その扱いが難しく複雑になりやすい。そこで本論文では、まず、対象物の運動を記述した不等式が、一般にどのような形式で表わされるかを明らかにした後、不等式条件を统一的に扱う数学的ツールとして、Goldmanらによる凸多面錐の理論<sup>7)</sup>を導入する。さらに、不等式条件を計算機上で評価し、作業計画を行うときに有用な、凸多面錐の演算・判定アルゴリズムを構築する。最後に、これらの理論および演算・判定アルゴリズムを、把握や組立に関する作業計画問題へ応用し、簡単な計算例を示す。

## 2. 操作対象物の運動の不等式による記述

把握や組立作業に代表されるマニピュレーションの問題では、マニピュレータが操作する対象物の運動を、記述することが必要である。このとき基礎式として、片側拘束に起因する不等式条件が現れる。本章では、操作対象物の運動が不等式条件で記述されることを、いくつかの代表的な例をあげて示し、その不等式の一般的な形式を導く。

### 2.1 ロボットハンドによる物体の把握<sup>2),4)</sup>

多点支持により物体（剛体）を把握する。ハンドと把持物体の間に摩擦は働かないとし、摩擦のいかんにかかわらず、幾何学的な拘束によって把握を行う場合を考える。Fig. 1 に示すように、支持点が  $n$  個あるとし、 $i$  番目の支持点の座標を、 $x_i$  で表わす。物体の表面は、有限個の滑らかな面に分割できる。面が  $m$  個あるとし、座標  $x$  から面  $j$  までの符号付き距離  $d$  を、 $g_j(x)$  で表わす。ただし物体の内部では負、外部では正になるように符号を定める。座標  $x$  が面  $j$  上にあるときは、 $g_j(x)=0$  である。関数  $g_j$  は微分可能であると仮定する。Fig. 1 に示すように、支持点  $i$  における面  $j$  の外向き法線ベクトルを、 $n_{ij}$  で表わす。支持点  $i$  が面  $j$  に接触しているとする。このとき

$$g_j(x_i)=0 \quad (1)$$

が成り立つ。物体がとりうる位置・姿勢の微小変位を、許容変位とよぶ。つぎに許容変位の集合を求める。

いま物体に、位置の微小変位  $\Delta x$  と、姿勢の微小変位  $\Delta \theta$  を与えたとする。このとき支持点  $i$  から面  $j$  ま

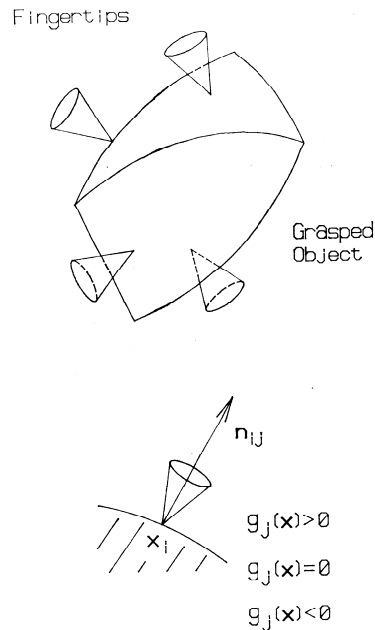


Fig. 1 Model of grasping by robotic hand

での符号付き距離  $d$  は

$$d=g_j(x_i-\Delta x-\Delta \theta \times x_i) \quad (2)$$

で表わされる。ここで  $\times$  は外積を表わす。(2)式を展開して(1)式を代入すると

$$\begin{aligned} d &= -\frac{\partial g_j}{\partial x}(x_i)(\Delta x + \Delta \theta \times x_i) \\ &= -n_{ij}^T \Delta x - (x_i \times n_{ij})^T \Delta \theta \\ &= -d_{ij}^T \Delta q \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。ここで

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} n_{ij} \\ x_i \times n_{ij} \end{bmatrix}, \quad \Delta q = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

である。各支持点は物体の外部または表面上にあるから、(3)式の値は正または0である。これより条件式  $d_{ij}^T \Delta q \leq 0$  (5)

が得られる。なお、物体の稜線や頂点と接触している場合は、つぎのようにして条件式を求める。物体の稜線や頂点は、いくつかの面の交わりとして表わされる。そこでまず、それぞれの面に対して不等式条件(5)式を求める。つぎに、文献8)の方法で、それぞれの不等式解集合の合併または共通集合を求めればよい。たとえば、凸な稜線と接触している場合の条件は、二つの不等式解集合の合併集合で、凹な稜線の場合は共通集合で表わされる。各支持点に対する条件式を、すべて満たす  $\Delta q$  が、許容変位である。それぞれの不等式条件を展開してまとめると、許容変位集合  $A$  は

$$A = \bigcup_{i=1}^N A_i \quad (6)$$

$$A_i = \{\Delta \mathbf{q} \mid \mathbf{h}_{ij}^T \Delta \mathbf{q} \leq 0, j=1, 2, \dots, M_i\} \quad (7)$$

$$\mathbf{h}_{ij} \in \{\mathbf{d}_{kl} \mid k=1, 2, \dots, n, l=1, 2, \dots, m\}$$

for all  $i, j$

と表わされる。許容変位集合  $A$  が、 $\mathbf{0}$  以外の要素をもたないならば、物体は運動できない。すなわち、ハンドによって対象物は、幾何学的に把握される。このような条件の成り立つ把握は、form closure<sup>9)</sup>といわれる。

## 2.2 部品の組付・分解可能性<sup>4)</sup>

組立部品を相手部品に組み付ける、あるいは相手部品から引き離す作業を考える。Fig. 2 はそれぞれ、最終的に組み上がった状態を示す。図の(a)、(b)は、組付・分解とも可能であるが、図の(c)はともにも不可能な場合である。このような組付・分解の可能性について考察する。

組立部品の位置  $\mathbf{x}$  と姿勢  $\theta$  をまとめて6次元(平面運動では3次元)ベクトル  $\mathbf{q} = [\mathbf{x}^T, \theta^T]^T$  で表わし、これを配位とよぶ。ここでは、最終配位  $\mathbf{q}$  の近傍についての運動を、考察するものとする。配位  $\mathbf{q}$  で組立部品がとることができる、位置・姿勢の微小変位  $\Delta \mathbf{q}$  の集合は、前節と同じように

$$A(\mathbf{q}) = \bigcup_{i=1}^N A_i(\mathbf{q}) \quad (8)$$

$$A_i(\mathbf{q}) = \{\Delta \mathbf{q} \mid \mathbf{h}_{ij}(\mathbf{q})^T \Delta \mathbf{q} \leq 0, j=1, 2, \dots, M_i\} \quad (9)$$

と表わされる。許容変位集合  $A(\mathbf{q})$  が、 $\mathbf{0}$  でない要素  $\Delta \mathbf{q}$  をもつとき、配位  $\mathbf{q}$  の近傍で組付・分解可能であ

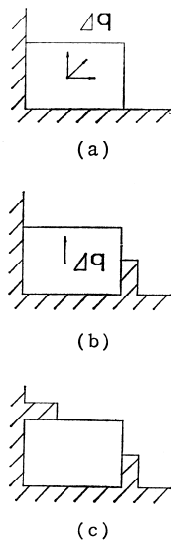


Fig. 2 Examples of planar object disassembly

る。許容変位  $\Delta \mathbf{q} \in A(\mathbf{q})$  を、Fig. 2 の(a)、(b)に示す。

## 2.3 ハイブリッド制御

ハイブリッド制御を行うには、物体の幾何学的条件に矛盾しないように、位置制御が可能な空間と、力制御が可能な空間を、同定することが必要である。ハイブリッド制御という位置制御可能空間とは、許容変位の空間であり、力制御可能空間とは、準静力学的な力のつりあい条件が満たされる力の空間である。クランク回し作業のように両側拘束の場合には、それぞれの空間は線形部分空間となり、たがいに直交補空間であることが知られている<sup>10)</sup>。これに対して、部品の組立作業などでは、片側拘束であるため、厳密には線形部分空間とはならず、従来の方は適用できない。本節では、片側拘束を受ける場合について、力制御が可能な空間を不等式によって記述する。

Fig. 3 に示すように、運動物体は固定物体と機械的に接触し、拘束を受けながら運動する。配位  $\mathbf{q} = [\mathbf{x}^T, \theta^T]^T$  において、運動物体がとりうる許容微小変位  $\Delta \mathbf{q}$  の集合を、 $A(\mathbf{q})$  で表わす。最初、物体は静止しているものとし、物体に並進力  $\mathbf{f}$  およびモーメント  $\mathbf{m}$  が作用したとき、ある微小変位  $\Delta \mathbf{q} = [\Delta \mathbf{x}^T, \Delta \theta^T]^T$  が生じたと仮定する。このとき運動学的条件より、 $\Delta \mathbf{q} \in A(\mathbf{q})$  が成り立つ。ロボット以外にエネルギーの供給源はないと仮定すれば、ロボットが物体になした仕事  $\Delta \text{Work}$  は、物体の運動エネルギーの増分  $\Delta T$  と摩擦などの散逸エネルギー  $\Delta C (\geq 0)$  の和に等しくなる。物体の運動エネルギーは増えているので、 $\Delta T > 0$  である。したがって、 $\Delta \text{Work} = \Delta T + \Delta C > 0$  が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \Delta \text{Work} &= \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{x} + \mathbf{m} \cdot \Delta \theta \\ &= \mathbf{p}^T \Delta \mathbf{q} \\ &> 0 \end{aligned} \quad (10)$$

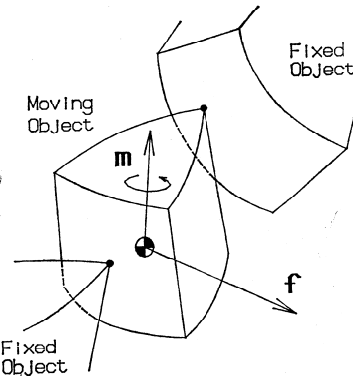


Fig. 3 Moving object constrained by contact with fixed objects

が成り立つ。ここで、 $\mathbf{p}=[\mathbf{f}^T, \mathbf{m}^T]^T$ である。以上の結果の対偶をとると、つぎの命題が得られる。

【命題1】 物体に力  $\mathbf{p}=[\mathbf{f}^T, \mathbf{m}^T]^T$  が作用しているとき、すべての  $\Delta \mathbf{q} \in A(\mathbf{q})$  に対して

$$\Delta \text{Work} = \mathbf{p}^T \Delta \mathbf{q} \leq 0 \quad (11)$$

ならば、物体は動かない。すなわち、ロボットが物体に加えた並進力  $\mathbf{f}$  およびモーメント  $\mathbf{m}$  は、物体からの反力とつりあう。

したがって、準静力学的なつりあい条件が満たされる力  $\mathbf{p}$  の集合は

$$F(\mathbf{q}) = \{\mathbf{p} \mid \forall \Delta \mathbf{q} \in A(\mathbf{q}), \mathbf{p}^T \Delta \mathbf{q} \leq 0\} \quad (12)$$

と表わされる。集合  $F(\mathbf{q})$  に属する力  $\mathbf{p}$  が、物体に加えられる限り、物体は平衡状態を保ち動かない。すなわち、上式の  $F(\mathbf{q})$  が、力制御可能空間に相当する。

作業の計画や制御の問題では、上述の基礎不等式をもとに、さまざまな演算や判定を行う。たとえば把握では、(6)、(7)式で表わされる許容変位の集合  $A$  が、0以外の要素をもつか否かを判定する必要がある。組付・分解では、許容変位集合  $A(\mathbf{q})$  に属する、0でない要素  $\Delta \mathbf{q}$  をみつけなくてはならない。また、ハイブリッド制御では、位置制御可能空間  $A(\mathbf{q})$  から、力制御可能空間  $F(\mathbf{q})$  を、(12)式によって求める必要がある。

以上の例における不等式はいずれも、二つのベクトルの内積が、負または0であるという形をしている。このように、マニピュレーションにおける微小運動学ならびに準静力学の問題は、ベクトルの内積で表わされる連立1次同次不等式を扱う問題に帰着される。3章では、このような形式の不等式を扱うための数学的ツールとして、凸多面錐の理論を導入する。

### 3. 凸多面錐の理論

#### 3.1 凸多面錐の定義

2章で述べたように、片側拘束を受ける操作対象物の運動は、不等式によって記述される。マニピュレーションの計画問題では、この基礎不等式を解かなくてはならない。基礎式に現れる不等式は、二つのベクトルの内積が、負または0であるという形をしている。このような形式の不等式条件を、統一的に扱うための数学的ツールとして、Goldman らによる凸多面錐の理論<sup>7)</sup>を導入する。また、この理論は、次章で導く演算・判定アルゴリズムの基礎になる。

ベクトル  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$  を、 $n$ 次元実ベクトルとする。 $n$ 次元ベクトルの集合

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{u}_i \mid c_i \geq 0, i=1, 2, \dots, k \right\} \quad (13)$$

を、凸多面錐 (polyhedral convex cone) とよぶ。ベクトル  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$  は、凸多面錐  $C$  を張る (span) といわれる。本論文では(13)式を、凸多面錐の span 形式とよび、

$$C = \text{span} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \} \quad (14)$$

と書く。また、ベクトル  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$  を、凸多面錐  $C$  の span ベクトルとよぶ。

#### 3.2 連立1次同次不等式の解法

ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  を、 $n$ 次元実ベクトルとする。連立1次同次不等式

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (15)$$

を解くと、解集合

$$A = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq 0, i=1, 2, \dots, m \} \quad (16)$$

は、つぎのように表わされる。

$$A = \text{span} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \} \quad (17)$$

すなわち、解集合  $A$  は凸多面錐である<sup>7)</sup>。ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  から、ベクトル  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$  を求めることにより、連立不等式が解かれる。そのためには、文献7)の方法を用いればよい。ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  は、凸多面錐  $A$  の面を表わす法線ベクトルである。本論文では(16)式を、凸多面錐の face 形式とよび、

$$A = \text{face} \{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \} \quad (18)$$

と書く。また、ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  を、凸多面錐  $A$  の face ベクトルとよぶ。連立1次同次不等式を解くことは、face 形式を span 形式へ変換することであるとみなせる。

#### 3.3 凸多面錐の極

$n$ 次元ベクトルの集合  $X$  に対して、集合

$$X^* = \{ \mathbf{y} \mid \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq 0 \} \quad (19)$$

を、集合  $X$  の極 (polar) とよぶ。

凸多面錐とその極の関係を Fig. 4 を使い、2次元の場合について調べる。凸多面錐  $A$  は、連立不等式  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq 0 \quad (i=1, 2)$  の解集合である。すなわち、

$$A = \text{face} \{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \}$$

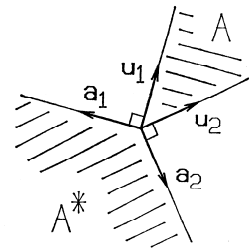


Fig. 4 Polyhedral convex cone and its polar

と表わされる。連立不等式を解くと、解集合  $A$  を張るベクトル  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  が求められる。すなわち、解集合  $A$  は、

$$A = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$$

と表わされる。図より、ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  は、極  $A^*$  を張ることがわかる。すなわち

$$A^* = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$$

である。また、連立不等式  $\mathbf{u}_i^T \mathbf{x} \leq 0$  ( $i=1, 2$ ) の解集合は、極  $A^*$  であることもわかる。すなわち

$$A^* = \text{face}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$$

が成り立つ。凸多面錐とその極の関係として、一般につきの命題が成り立つ。

[命題2]<sup>7)</sup> 凸多面錐

$$A = \text{face}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$$

の極は、

$$A^* = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$$

と表わされる。また、凸多面錐

$$A = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$$

の極は、

$$A^* = \text{face}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$$

と表わされる。

命題2より、凸多面錐  $A$  の極  $A^*$  も、凸多面錐であることがわかる。これを  $A$  の双対凸多面錐 (dual polyhedral convex cone) という。また、凸多面錐  $A$  に対して

$$(A^*)^* = A \quad (20)$$

が成り立つことも、命題2より明らかである。

前述の face 形式を span 形式へ変換する手続きを、双対凸多面錐

$$A^* = \text{face}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} \quad (21)$$

に適用すると、 $A^*$  の span 形式

$$A^* = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \quad (22)$$

が得られる。すなわちベクトル  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$  から、ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  が導かれる。命題2より、凸多面錐  $A$  の span 形式および face 形式は、それぞれ、

$$A = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} \quad (23)$$

$$A = \text{face}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \quad (24)$$

である。したがって、双対凸多面錐  $A^*$  の face 形式から span 形式への変換により、凸多面錐  $A$  の span 形式から face 形式への変換が行われる。以上の考察から、前節の手続きは、face 形式から span 形式への変換のみならず、span 形式から face 形式への変換も行うことができる。本論文ではこの手続きを、アルゴリズム CONVERT とよぶ。アルゴリズム CONVERT を用いると、凸多面錐を、span 形式でも face 形式でも書き表わすことができる。

### 3.4 凸多面錐の演算

$n$ 次元ベクトルの集合  $X, Y$  に対して、集合

$$X+Y = \{\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\} \quad (25)$$

を、集合  $X$  と  $Y$  の凸和 (convex sum) とよぶ。共通集合  $X \cap Y$ 、凸和  $X+Y$  の定義より、

$$\begin{aligned} \text{face}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \cap \text{face}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\} \\ = \text{face}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} + \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\} \\ = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\} \end{aligned} \quad (27)$$

は、明らかである。これより、凸多面錐  $A, B$  の共通集合  $A \cap B$  および凸和  $A+B$  も、凸多面錐であることがわかる。(26), (27)式に命題2を適用すると、

$$(A \cap B)^* = A^* + B^* \quad (28)$$

$$(A+B)^* = A^* \cap B^* \quad (29)$$

が証明される。以上の結果をまとめておく。

[命題3]<sup>7)</sup> 集合  $A, B$  が凸多面錐ならば

(a)  $A^*, A \cap B, A+B$  は凸多面錐

(b)  $(A^*)^* = A$

(c)  $(A \cap B)^* = A^* + B^*$

(d)  $(A+B)^* = A^* \cap B^*$  (30)

が成り立つ。

## 4. 凸多面錐の演算・判定アルゴリズム

本章では、凸多面錐の理論を基礎として、凸多面錐の演算や判定を行うアルゴリズムを導く。以下のアルゴリズムは、すべて計算機上で実現可能であり、計算機上で作業計画を行うときの、基礎的な手続きになる。

(1) 凸多面錐  $A$  の双対凸多面錐  $A^*$  を求めるアルゴリズム

凸多面錐  $A$  が

$$A = \text{face}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$$

と表わされているとき、命題2より双対凸多面錐  $A^*$  は、

$$A^* = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$$

である。すなわち、双対凸多面錐  $A^*$  は、span 形式で表わされ、その span ベクトルは、凸多面錐  $A$  の face ベクトルである。また凸多面錐  $A$  が

$$A = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$$

と表わされているとき、命題2より双対凸多面錐  $A^*$  は、

$$A^* = \text{face}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$$

である。すなわち、双対凸多面錐  $A^*$  は、face 形式で表わされ、その face ベクトルは、 $A$  の span ベクトルである。双対凸多面錐を計算する以上のアルゴリズムを、アルゴリズム DUAL とよぶ。手続き DUAL

(A) は、凸多面錐  $A$  の双対凸多面錐  $A^*$  を導くものとする。

(2) 凸多面錐  $A, B$  の共通集合  $A \cap B$  を求めるアルゴリズム

凸多面錐  $A, B$  が、span 形式で表わされているならば、アルゴリズム CONVERT を用いて、face 形式で表わす。

$$A = \text{face} \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$$

$$B = \text{face} \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

すると、 $A$  と  $B$  の共通集合は、

$$A \cap B = \text{face} \{a_1, a_2, \dots, a_i, b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

となる。すなわち、共通集合  $A \cap B$  は、face 形式で表わされ、その face ベクトルは、凸多面錐  $A, B$  の face ベクトルである。凸多面錐の共通集合を計算する以上のアルゴリズムを、アルゴリズム INTERSECT とよぶ。手続き INTERSECT ( $A, B$ ) は、二つの凸多面錐  $A, B$  の共通集合  $A \cap B$  を導くものとする。

(3) 凸多面錐  $A, B$  の凸和  $A+B$  を求めるアルゴリズム凸多面錐  $A, B$  が face 形式で表わされているならば、アルゴリズム CONVERT を用いて、span 形式で表わす。

$$A = \text{span} \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

$$B = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

すると、 $A$  と  $B$  の凸和は

$$A+B = \text{span} \{u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

となる。すなわち、凸和  $A+B$  は、span 形式で表わされ、その span ベクトルは、凸多面錐  $A, B$  の span ベクトルである。凸多面錐の凸和を計算する以上のアルゴリズムを、アルゴリズム CONVEXSUM とよぶ。手続き CONVEXSUM ( $A, B$ ) は、二つの凸多面錐  $A, B$  の凸和  $A+B$  を導くものとする。

(4) 凸多面錐  $A$  が  $0$  以外の要素をもつか否かを判定するアルゴリズム

凸多面錐  $A$  が、face 形式で表わされているならば、アルゴリズム CONVERT を用いて、span 形式で表わす。もし、凸多面錐  $A$  の span ベクトルが存在するならば、凸多面錐  $A$  は  $0$  以外の要素をもつ。存在しないならば、 $0$  以外の要素をもたない。凸多面錐が、 $0$  以外の要素をもつか否かを判定する以上のアルゴリズムを、アルゴリズム NONZERO とよぶ。手続き NONZERO ( $A$ ) は、凸多面錐  $A$  が  $0$  以外の要素をもつとき true を、 $0$  以外の要素をもたないとき false を与えるものとする。

(5) あるベクトル  $r$  が凸多面錐  $A$  に属するか否かを判定するアルゴリズム

凸多面錐  $A$  が、

$$A = \text{face} \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

と表わされているとする。このとき、

$$a_i^T r \leq 0 \quad \text{for all } i=1, 2, \dots, m \quad (31)$$

が成り立つならば、またそのときに限って、ベクトル  $r$  は凸多面錐  $A$  に属する。また、凸多面錐  $A$  が、

$$A = \text{span} \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

と表わされているとする。このとき、

$$\sum_{i=1}^k c_i u_i = r \quad (32)$$

$$c_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, k$$

を満たす  $c_1, c_2, \dots, c_k$  が存在するならば、またそのときに限り、ベクトル  $r$  は凸多面錐  $A$  に属する。この条件は、線形計画法における実行可能性の判定問題として、二段階シンプレックス法の第一段階<sup>13)</sup>を用いて判定することができる。あるベクトルが凸多面錐の要素であるかどうかを判定する、以上のアルゴリズムを、アルゴリズム ELEMENT とよぶ。手続き ELEMENT ( $r, A$ ) は、ベクトル  $r$  が凸多面錐  $A$  の要素であるなら true を、要素でないなら false を与えるものとする。

(6) 凸多面錐  $A$  が凸多面錐  $B$  の部分集合であるかを判定するアルゴリズム

凸多面錐  $A$  が、face 形式で表わされているならば、アルゴリズム CONVERT を用いて、span 形式で表わす。

$$A = \text{span} \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

このとき

$$u_i \in B \quad \text{for all } i=1, 2, \dots, k \quad (33)$$

が成り立つならば、またそのときに限り、凸多面錐  $A$  は凸多面錐  $B$  の部分集合である。ベクトル  $u_i$  が凸多面錐  $B$  に属するかどうかは、アルゴリズム ELEMENT を用いて判定できる。凸多面錐の包含関係を判定する以上のアルゴリズムを、アルゴリズム SUBSET とよぶ。手続き SUBSET ( $A, B$ ) は、凸多面錐  $A$  が凸多面錐  $B$  の部分集合ならば true を、部分集合でないなら false を与えるものとする。

## 5. 凸多面錐演算アルゴリズムの作業計画への応用

本章では、2章であげた例に対して凸多面錐の理論を応用し、演算・判定アルゴリズムをどのように適用して基礎不等式を解き、作業計画を行うかを示す。

### 5.1 物体の把握問題への応用

3章で導入した記号を用いて、(7)式を書きなおすと、対象物がとりうる許容変位の集合  $A$  は、

**Table 1** Algorithm for examining form closure grasp condition

```

for  $i=1$  to  $N$  do
begin
 $A_i \leftarrow \text{face} \{h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{iM_i}\}$ ;
if  $\text{NONZERO}(A_i) = \text{true}$  then
return(false)
end;
return(true)

```

$$A = \bigcup_{i=1}^N A_i \quad (34)$$

$$A_i = \text{face} \{h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{iM_i}\} \quad (35)$$

と表わされる。集合  $A_1, A_2, \dots, A_N$  は凸多面錐であり、許容変位集合  $A$  は、凸多面錐の合併集合として表わされる。

摩擦のいかんにかかわらず対象物を幾何学的に拘束して把握できる条件は、集合  $A$  が  $\mathbf{0}$  以外の要素をもたないこと、すなわち

$$A = \{\mathbf{0}\} \quad (36)$$

である。(36)式の条件は

$$A_i = \{\mathbf{0}\} \quad \text{for all } i=1, 2, \dots, N \quad (37)$$

と等価である。判定アルゴリズム  $\text{NONZERO}$  を用いると、この条件は、

$$\text{NONZERO}(A_i) = \text{false} \quad \text{for all } i=1, 2, \dots, N \quad (38)$$

と表わされる。したがって、対象物を幾何学的に把握できるか否かを判定する手続きは、**Table 1** のようになる。この手続きは、対象物を幾何学的に把握できるならば true を、できないならば false を与える。

### 5.2 組付・分解の作業計画問題への応用

最終配位  $q$  で組立部品がとりうる許容変位の集合  $A(q)$  は、前節と同様(34), (35)式で表わされる。したがって、組付・分解可能性の判定は、前節と同じ手続きで行うことができる。

組付・分解の作業計画を行うためには、許容変位  $\Delta q \in A(q)$

をみつけなくてはならない。許容変位  $\Delta q$  は、つぎのようにして求められる。まず、アルゴリズム  $\text{CONVERT}$  を用いて、 $\mathbf{0}$  以外の要素を含む凸多面錐  $A_i(q)$  を、face 形式から span 形式に変換する。すなわち

$$A_i(q) = \text{span} \{u_{i1}(q), u_{i2}(q), \dots, u_{iK_i}(q)\} \quad (39)$$

すると、凸多面錐  $A_i(q)$  に属する微小変位  $\Delta q$  は、

$$\Delta q = \sum_{j=1}^{K_i} c_{ij} u_{ij}(q) \quad (40)$$

$$c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{iK_i} \geq 0$$

により生成できる。したがって、凸多面錐  $A_i(q) \neq \{\mathbf{0}\}$  を適当に選び、上式で  $\Delta q$  を計算すれば、許容変位  $\Delta q \in A(q)$  を求めることができる。

### 5.3 力制御可能空間の計算

物体がとりうる許容変位の集合を、 $A(q)$  で表わす。許容変位集合  $A(q)$  は、位置制御が可能な空間である。(12)式と(19)式を比較すると、力制御が可能な空間  $F(q)$  は、つぎのように表わされる。

$$F(q) = A(q)^* \quad (41)$$

すなわち力制御が可能な空間  $F(q)$  は、位置制御が可能な空間  $A(q)$  の極である。

許容変位集合  $A(q)$  は、凸多面錐  $A_i(q)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) の合併集合として表わされる。すなわち

$$A(q) = A_1(q) \cup A_2(q) \cup \dots \cup A_N(q) \quad (42)$$

である。集合  $X, Y$  に対して、

$$(X \cup Y)^* = (X + Y)^* \quad (43)$$

が成り立つことが、容易に証明される。したがって、

$$\begin{aligned} F(q) &= [A_1(q) \cup A_2(q) \cup \dots \cup A_N(q)]^* \\ &= [A_1(q) + A_2(q) + \dots + A_N(q)]^* \\ &= A_1(q)^* \cap A_2(q)^* \cap \dots \cap A_N(q)^* \end{aligned} \quad (44)$$

が得られる。すなわち集合  $F(q)$  は、双対凸多面錐  $A_i(q)^*$  の共通集合である。双対凸多面錐  $A_i(q)^*$  は、アルゴリズム  $\text{DUAL}$  を用いて求められる。さらにアルゴリズム  $\text{INTERSECT}$  を用いると、凸多面錐  $F(q)$  が求められる。したがって、力制御可能空間  $F(q)$  を計算する手続きは、**Table 2** のようになる。1行目の命令は、力  $p$  の全体集合を  $F$  とすることを表わす。この手続きによって求められた凸多面錐  $F$  が、力制御可能空間である。

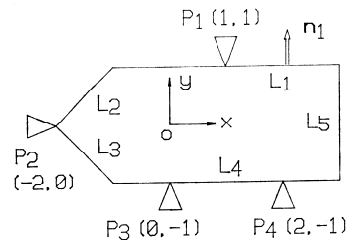
**Fig. 5** の平面図形を例にとり、力制御可能空間  $F$  の計算過程を示す。固定物体は、4個の点  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, 4$ ) である。点  $P_1$  は面  $L_1$  に、点  $P_3, P_4$  は面  $L_4$

**Table 2** Algorithm for computing force-controlled space

```

 $F \leftarrow \text{face} \{ \};$ 
for  $i=1$  to  $N$  do
begin
 $A_i \leftarrow \text{face} \{h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{iM_i}\}$ ;
 $B_i \leftarrow \text{DUAL}(A_i)$ ;
 $F \leftarrow \text{INTERSECT}(F, B_i)$ 
end

```

**Fig. 5** Simple example of planar object and fixed points

に接触している。点  $P_2$  は、面  $L_2$  と  $L_3$  の交わりとして表わされる頂点に接触している。この頂点は凸である。点  $P_i$  の座標を  $\mathbf{x}_i$  で、面  $L_j$  の外向き法線ベクトルを  $\mathbf{n}_j$  で表わす。このとき、物体がとりうる微小変位  $\Delta \mathbf{q}$  に対する条件式は、

$$\begin{cases} \mathbf{d}_{11}^T \Delta \mathbf{q} \leq 0 \\ \mathbf{d}_{22}^T \Delta \mathbf{q} \leq 0 \text{ or } \mathbf{d}_{23}^T \Delta \mathbf{q} \leq 0 \\ \mathbf{d}_{34}^T \Delta \mathbf{q} \leq 0 \\ \mathbf{d}_{44}^T \Delta \mathbf{q} \leq 0 \end{cases} \quad (45)$$

となる。ただし

$$\mathbf{d}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_j \\ \mathbf{x}_i \times \mathbf{n}_j \end{bmatrix} \quad (46)$$

である。ベクトル  $\mathbf{d}_{ij}$  の値を計算すると、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{11} &= [0, 1, 1]^T \\ \mathbf{d}_{22} &= [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -\sqrt{2}]^T \\ \mathbf{d}_{23} &= [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, \sqrt{2}]^T \\ \mathbf{d}_{34} &= [0, -1, 0]^T \\ \mathbf{d}_{44} &= [0, -1, -2]^T \end{aligned} \quad (47)$$

(45)式を展開してまとめると、位置制御可能空間  $A$  は、

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cup A_2 \\ A_1 &= \text{face} \{ \mathbf{d}_{11}, \mathbf{d}_{22}, \mathbf{d}_{34}, \mathbf{d}_{44} \} \\ A_2 &= \text{face} \{ \mathbf{d}_{11}, \mathbf{d}_{23}, \mathbf{d}_{34}, \mathbf{d}_{44} \} \end{aligned} \quad (48)$$

と表わされる。前述の手続きにより、力制御可能空間  $F$  を計算すると、

$$F = \text{span} \{ \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5 \} \quad (49)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= [0, 1, 0]^T \\ \mathbf{f}_2 &= [0, -1, 0]^T \\ \mathbf{f}_3 &= [0, 0, 1]^T \\ \mathbf{f}_4 &= [0, 0, -1]^T \\ \mathbf{f}_5 &= [-1, 0, 0]^T \end{aligned} \quad (50)$$

である。これをまとめると、

$$F = \{ [f_x, f_y, m]^T \mid f_x \leq 0, f_y, m \text{ は任意} \} \quad (51)$$

と表わされる。ただし、 $f_x, f_y$  は  $x, y$  方向の並進力、 $m$  はモーメントを表わす。並進力  $f_x$  の値が正でなければ、ロボットが物体に加えた並進力およびモーメントは、固定点  $P_i (i=1, 2, \dots, 4)$  からの反力とつりあい、物体は動かない。

## 6. 結 言

操作対象物の運動を不等式によって記述し、この基礎不等式にもとづいて作業計画や制御を行うための数学的ツールとして、凸多面錐の理論を導入し、凸多面

錐の演算・判定アルゴリズムを構築した。

把握や組立作業に代表されるマニピュレーションにおいてロボットは、物体どうしの機械的な接触を通して対象物の操作を行う。本論文ではまず、機械的な接触による操作対象物の運動の拘束が、不等式によって記述されることを示し、その一般的な形式を導いた。つぎに、このような形式の不等式条件を扱うための数学的ツールとして、凸多面錐の理論を導入した。作業の計画や制御の問題では、凸多面錐のさまざまな演算や判定を行う必要がある。そこで凸多面錐の演算・判定アルゴリズムを構築し、計算機を利用した把握や組立に関する作業計画問題へ応用した。

マニピュレーションにおける微小運動学ならびに準静力学の問題は、把握や組立作業の計画・制御問題の基礎になる。したがって、本論文で提案した凸多面錐理論を用いたマニピュレーションの運動学は、把握や組立作業に代表されるマニピュレーションの作業計画や制御問題への、はばひろい応用が期待される。

## 参 考 文 献

- 1) 浅田：マニピュレーション—その理論と応用—，日本機械学会誌，**90**-818, 83/89 (1987)
- 2) V. Nguyen: The Synthesis of Stable Grasps in the Plane, IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 884/889 (1986)
- 3) D. E. Whitney: Quasi-Static Assembly of Compliantly Supported Rigid Parts, ASME J. Dynamic Syst., Meas., Contr., **104**, 65/77 (1982)
- 4) H. Asada and A. B. By: Kinematic Analysis of Workpart Fixturing for Flexible Assembly with Automatically Reconfigurable Fixtures, IEEE Trans. Robotics and Automation, **RA-1-2**, 86/94 (1985)
- 5) V. T. Rajan, R. Burridge, and J. T. Schwartz: Dynamics of a Rigid Body in Frictional Contact with Rigid Walls—Motion in Two Dimensions, IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 671/677 (1987)
- 6) 高瀬，末広：環境拘束による物体運動の強制停止に関する理論解析，第5回日本ロボット学会学術講演会予稿集，261/262 (1987)
- 7) A. J. Goldman and A. W. Tucker: Polyhedral Convex Cones, H. W. Kuhn and A. W. Tucker eds., Linear Inequalities and Related Systems, Annals of Math. Studies, **38**, Princeton, 19/39 (1956)
- 8) 平井，浅田，得丸：組立作業における物体の接触状態遷移に関する運動学的解析とそのネットワーク表現の自动生成，計測自動制御学会論文集，**24**-4, 406/413 (1988)
- 9) K. Lakshminarayana: Mechanics of Form Closure, ASME Report No. 78-DET-32 (1978)
- 10) M. T. Mason: Compliant Motion, M. Brady, et al., eds., Robot Motion, 305/322, Cambridge, MIT Press (1982)
- 11) 西川，三宮，茨木：岩波講座 情報科学—19 最適化，2.1 節 線形計画法，9/41, 岩波書店 (1982)