一次元間接同時位置決めの安定性解析

○柴田 瑞穂，平井 慎一　立命館大学

Stability Analysis of One-demensional Indirect Simulataneous Positioning

○ Mizuho SHIBATA, Shinichi HIRAI
Ritsumeikan Univ.

Abstract: This paper represents a stability analysis of one-dimensional indirect simultaneous positioning (ISP). An ISP system is described as a set of single input-output non-collocated systems. We analyze the stability of a non-collocated system by Rauth-Hurwitz criterion to construct a Lyapunov function using examples from a collocated system. We also analyze the stability of the system connected two stable non-collocated systems.

1　緒言

布地の位置決めに代表されるように，柔軟物の操作には，「複数の操作点を同時に制御することが可能」であり，「直接操作点を操作できない」ような物体操作が存在する．本研究では，これを間接同時位置決め問題 [1] と呼び，その安定性を解析する．本論文では，間接同時位置決め問題は本質的に「ノンコロケーションシステムが安定となるか」と「安定な系同士をバネ・ダンパーで結合した系は安定となるか」という 2 つの問題に帰着されることを指摘し，1 次元上の間接同時位置決め問題を例に安定性を解析する．

2　アプローチ

Fig.1 に布地の間接同時位置決め問題の概念図を示す．本論文では，柔軟体の変形と運動を質点の集合で表現する．また，柔軟体を粘弾性体でモデル化する．1 次元上で柔軟体の間接同時位置決め問題を表現する最小の質点数は 4 点である．このとき，両端の質点を操作し，柔軟体内部の質点を目標配置に位置決めする．操作点の質量には，マニピュレータの質量を含める．間接同時位置決め問題の持つ「直接操作点を操作できない」および「複数の操作点を同時に制御することが可能」という特徴は，「一入力一出力のノンコロケート系の集合を制御する」と言い換えることができる．すなわち，Fig.2 に示されるように，間接同時位置決め問題は本質的に「ノンコロケーション系が安定となるか」と「安定な系同士をバネ・ダンパーで結合した系は安定となるか」という 2 つの問題に帰着される．本論文では，これらのアプローチから間接同時位置決めの安定性を解析する．

3　ノンコロケート系の安定性

本節では，Fig.3 に示される，質点が 2 個のノンコロケート系の安定性を解析する．質点 P_0 を質点 P_1 の位置情報を用いて操作し，質点 P_1 を目標位置 x_d に位置決めする．運動方程式は，制御則に PD 制御を用いる場合，

$$\begin{cases} m_0\ddot{x}_0 = -k_{01}(L_{01} - (x_1 - x_0)) - b_{01}(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) \\ \qquad\qquad -K_p(x_1 - x_d) - K_v\dot{x}_1 \\ m_1\ddot{x}_1 = k_{01}(L_{01} - (x_1 - x_0)) + b_{01}(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (1)$$

となる．ここで，m_i は質点 P_i の質量，k_{ij}，b_{ij}，L_{ij} は，それぞれ質点 P_i と P_j の間にある粘弾性体のバネ係数，粘性係数，自然長である．また，K_p は比例ゲイン，K_v は速度ゲインである．物理パラメータおよびゲインはすべて正値である．状態変数を $\boldsymbol{x} = [\dot{x}_0\ \dot{x}_1\ (x_0 - x_d - L_{01})\ (x_1 - x_d)]^{\mathrm{T}}$ とすると，式 (1) は $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$ と変形され，このとき係数行列 $\boldsymbol{A}$ は，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -B_0 & B_0 - K_V & -K_0 & K_0 - K_P \\ B_1 & -B_1 & K_1 & -K_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

となる．ここで，$\boldsymbol{u}$ は定数ベクトルであり，系の安定性には関係がない．また，$B_0 = b_{01}/m_0$，$B_1 = b_{01}/m_1$，$K_0 = k_{01}/m_0$，$K_1 = k_{01}/m_1$，$K_V = K_v/m_0$，$K_P = K_p/m_0$ である．この係数行列の特性方程式は，固有値を λ とおくと，

$$\lambda^4 + (B_0 + B_1)\lambda^3 + (K_0 + K_1 + B_1K_V)\lambda^2 \\ +(B_1K_P + K_1K_V)\lambda + K_1K_P = 0 \quad (3)$$

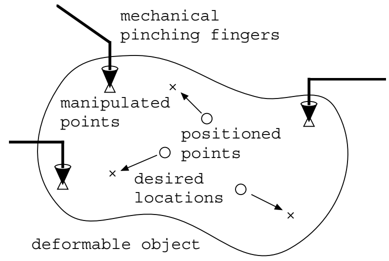

Fig.1: Indirect simulataneous positioning

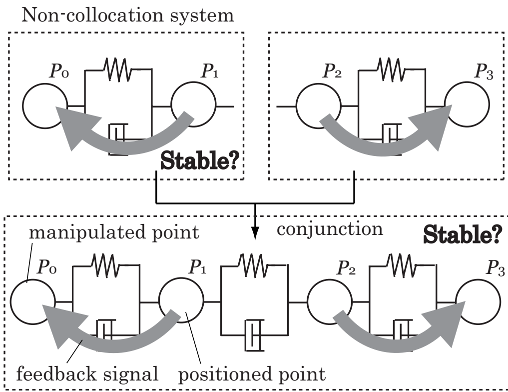

Fig.2: Concept of solution method

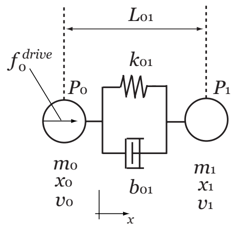

Fig.3: Linear mechanical system (2masses)

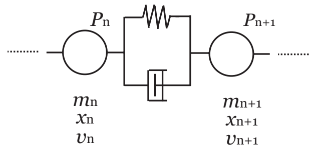

Fig.4: Connection between linear mechanical system

となり，その係数はすべて正である．したがって，式 (3) のフルビッツ行列の主座小行列式がすべて正であれば，この系は漸近安定となる．ここで，簡単のために，$m_0 = m_1$ の場合を検証する．この条件で，$K_V = b_{01}$，$K_P = k_{01}$ と選ぶと，主座小行列式はそれぞれ，

$$H_1 = B_0 + B_1 > 0, \tag{4}$$

$$H_2 = 2B_0K_0 + 2B_0^3 > 0, \tag{5}$$

$$H_3 = 4B_0^4K_0 > 0 \tag{6}$$

となり, 粘性係数, 弾性係数の値によらず, 漸近安定となる．これにより, 適切にゲインを設定することでノンコロケート系が漸近安定となることが分かった．線形空間では, 安定になることと, リアプノフ関数が見つかることは必要十分である．状態変数 $\boldsymbol{q}$ の線形機械システムを $\boldsymbol{R}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ とおくと，コロケート系では，係数行列 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{P}$ を用いてリアプノフ関数 $\boldsymbol{W}$ を

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P} \end{array}\right] \tag{7}$$

と選ぶことができる．このとき，リアプノフ方程式は $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}$ となり，係数行列 $\boldsymbol{Q}$ の正定性を利用して，漸近安定性が証明できる．これにならい，ノンコロケート系のリアプノフ関数を導く．ノンコロケート系の場合の，係数行列 $\boldsymbol{Q}$ は，

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} b_{01} & -b_{01} + K_V \\ -b_{01} & b_{01} \end{bmatrix} \tag{8}$$

と表される．このとき，係数行列 $\boldsymbol{Q}$ を用いて $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ が正定関数になるためには，

$$0 < K_V < 4b_{01} \tag{9}$$

の条件を満たせばよい．ここで，行列 $\boldsymbol{Q}$ が非対称行列であるので，行列 $\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q}$ にシルベスタの方法を適用しなければいけないことに注意する．したがって，前述のように，$K_V = b_{01}$ のとき，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}$ となるようにリアプノフ行列 $\boldsymbol{W}$ を選ぶことができる．リアプノフ行列は $m_0 = 1$ とすると，

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \frac{2b_{01}^2 + k_{01}}{4b_{01}^2} & \frac{1}{4} & \frac{k_{01}}{2b_{01}} & -\frac{k_{01}}{4b_{01}} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{k_{01}}{4b_{01}} & 0 \\ 0 & \frac{k_{01}}{4b_{01}} & \frac{2b_{01}^2k_{01} + k_{01}^2}{4b_{01}^2} & 0 \\ -\frac{k_{01}}{4b_{01}} & 0 & -\frac{k_{01}}{2} & \frac{k_{01}}{2} \end{bmatrix} \tag{10}$$

4 ノンコロケートで安定な系同士の結合

本節では，ノンコロケートで安定な系同士をバネ・ダンパーで結合した系の安定性を解析する．線形機械システム $\boldsymbol{R}_i\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{Q}_i\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ $(i = 1, 2)$ の係数行列 $\boldsymbol{Q}_i$ が，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q_i}\boldsymbol{x} > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \neq 0 \tag{11}$$

を満たすとする．Fig.4 に示されるように，この 2 つの線形システムをバネ係数 k，粘性係数 b のフォークトモデルで結合した場合，系 $\boldsymbol{R}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ の係数行列 $\boldsymbol{Q}$ は，

$$\boldsymbol{Q} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{Q_1} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q_2} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & b & -b & \cdots \\ \hline \cdots & -b & b & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right] \tag{12}$$

となる．このとき，上式の行列式は，

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{Q}| = \left|\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_2 \end{array}\right]\right| &+ b\left|\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_2^{n-1} \end{array}\right]\right| \\ &+ b\left|\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{Q}_1^{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_2 \end{array}\right]\right| \end{aligned} \tag{13}$$

と余因子展開できる．したがって，式 (11) を満足するとき，行列 $\boldsymbol{Q}$ が非対称行列であっても，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ は正定関数となる．ただし，$\boldsymbol{Q}_i^{n-1}$ は，$n-1$ 次正方行列であり，n 次正方行列 $\boldsymbol{Q}_i$ の 1〜$(n-1)$ 行列成分で構成されている．この正定条件より，安定な系同士をバネ・ダンパーで結合した系も，漸近安定になることがすぐに確かめられる．

5 結言

本論文では，間接同時位置決め問題が本質的にノンコロケーション系の安定性解析および安定な系同士をバネ・ダンパーで結合した系の安定性解析という 2 つの問題に帰着できることを指摘し，1 次元上の間接同時位置決め問題を例に安定性を解析した．今後は，粘弾性体の非線形化および多次元拡張を行なう予定である．

参考文献

[1] T. Wada, S. Hirai and S. Kawamura: "Indirect Simultaneous Positioning Operations of Extensionally Deformable Objects", *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 2, pp.1333–1338, Vancouver, October, 1998.

[2] M. Shibata and S. Hirai, "Soft Object Manipulation by Simultaneous Control of Motion and Deformation", *Proc. of the 2006 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp.2460-2465, 2006.