

# 四元数を用いた線状ソフトロボットの三次元変形表現

平井 慎一 (立命館大学)

## 1. 緒言

線状ソフトロボットの三次元変形を、四元数を用いて表現する手法を提案する。線状ソフトロボットのモデリング手法として、微分幾何座標が提案されている [1]。さらに、微分幾何座標と直交座標を混合して用いて、二次元動変形における計算量を減らす、混合座標法が提案された [2]。微分幾何座標においては、線状ソフトロボットの各点における接ベクトルを、姿勢角で表す。二次元動変形におけるモデリングでは、接ベクトルを  $[\cos \theta, \sin \theta]^T$  と表し、特異点の問題は生じない。一方、三次元動変形におけるモデリングにおいて、オイラー角を用いる手法では、接ベクトルをたとえば  $[\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, \sin \theta]^T$  と表す。この場合、 $\theta = \pi/2$  が特異点となり、混合座標法における慣性行列に関する計算に特異点近傍で問題が生じることが判明した。この特異点の問題は、オイラー角を用いる限り避けられない。そこで、本報告では、特異点を持たない四元数により三次元変形を表すことを試みる。

## 2. 四元数を用いた微分幾何座標の表現

線状ソフトロボットの三次元空間内の静的な変形形状を定式化する。線状ソフトロボットは、曲げ変形のみを生じ、伸縮変形を伴わないとする。線状ソフトロボットの全長を  $L$  で表し、ボディに沿う一端からの距離が  $\xi$  である点を  $P(\xi)$  で表す。空間に直交座標系  $O-xyz$  を固定し、点  $P(\xi)$  に直交座標系  $P-\xi\eta\zeta$  を設定する。ただし、 $\xi$  軸は点  $P(\xi)$  における接ベクトルに沿うとする。また、自然状態で  $\xi, \eta, \zeta$  軸は、 $x, y, z$  軸に平行であると仮定する。座標系  $P-\xi\eta\zeta$  の  $\xi, \eta, \zeta$  軸に沿う単位ベクトルを  $e_\xi, e_\eta, e_\zeta$  で表す。

曲げ変形を表すために、座標系  $O-xyz$  から  $P-\xi\eta\zeta$  への座標変換を導入する。座標変換を定める回転行列を、四元数ベクトル

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

を用いて表す。四元数ベクトルは、制約

$$\mathbf{q}^T \mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

を満たさなくてはならない。このとき回転行列は

$$\begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix}$$

となる。回転行列の第 1, 2, 3 列が、単位ベクトル  $e_\xi, e_\eta, e_\zeta$  に対応する。

変数  $\xi$  に関する微分を、記号 ' で表す。ベクトル  $e_\xi, e_\eta, e_\zeta$  を  $\xi$  に関して微分すると

$$\begin{bmatrix} e'_\xi & e'_\eta & e'_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\xi & e_\eta & e_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & \end{bmatrix}$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= 2 \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \end{bmatrix} \mathbf{q}' \\ \omega_\eta &= 2 \begin{bmatrix} -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \end{bmatrix} \mathbf{q}' \\ \omega_\zeta &= 2 \begin{bmatrix} -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \mathbf{q}' \end{aligned}$$

は、 $\xi, \eta, \zeta$  まわりの曲率を表す。柔軟線状ロボットの曲げ剛性  $R_f$  が、曲げの方向にかかわらず一定であると仮定すると、曲げエネルギー線密度は

$$\kappa = \frac{1}{2} R_f (\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2)$$

となる。結局、曲げポテンシャルエネルギーは

$$U = \int_0^L \kappa d\xi = \int_0^L \frac{1}{2} R_f (\omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2) d\xi$$

と表される。

## 3. 区分線形近似による有限要素モデリング

四元数ベクトル  $\mathbf{q}(\xi)$  を区分線形近似し、有限要素法によりロボットの変形形状を計算する。区間  $[0, L]$  に等間隔で  $n$  個の節点を置く。すなわち、区間長は  $h = L/(n-1)$  であり、節点は  $\xi_k = (k-1)h$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) に対応する。節点  $\xi_k$  における四元数ベクトルを  $\mathbf{q}_k$  で表す。ベクトル  $\mathbf{q}_k$  は、制約式  $Q_k = \mathbf{q}_k^T \mathbf{q}_k - 1 = 0$  を満たさなくてはならない。四元数ベクトル  $\mathbf{q}(\xi)$  を区間  $[\xi_k, \xi_{k+1}]$  で近似する。区間内で制約式を満たすために

$$\mathbf{q}(\xi) = \frac{\tilde{\mathbf{q}}(\xi)}{\|\tilde{\mathbf{q}}(\xi)\|}$$

$$\tilde{\mathbf{q}}(\xi) = \mathbf{q}_k N_{k,k+1}(\xi) + \mathbf{q}_{k+1} N_{k+1,k}(\xi)$$

と近似する。このとき

$$\mathbf{q}'(\xi) = \frac{\tilde{\mathbf{q}}'}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\tilde{\mathbf{q}}' \cdot \tilde{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|^3} \tilde{\mathbf{q}}$$

$$\tilde{\mathbf{q}}'(\xi) = \frac{\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k}{h}$$

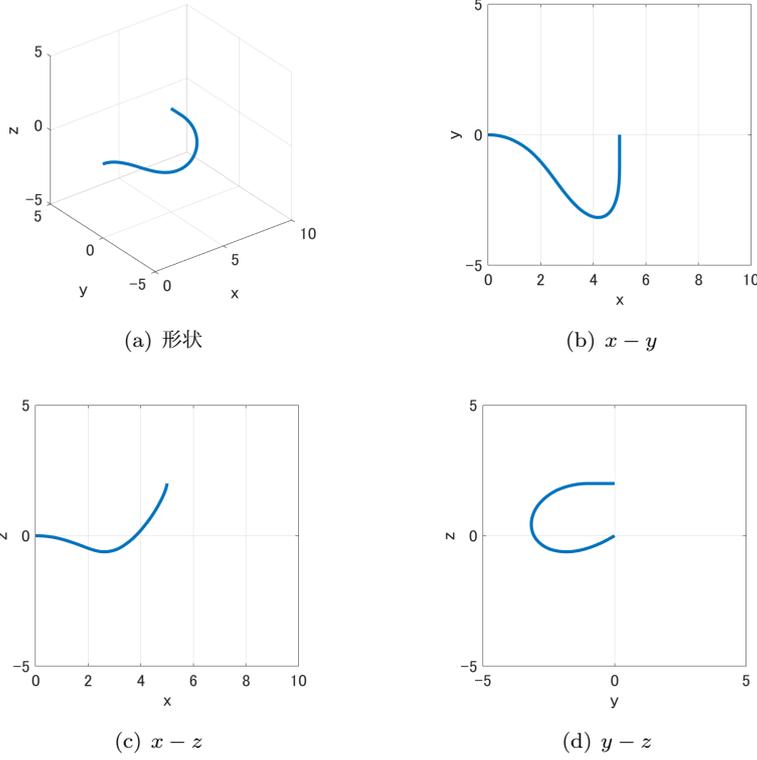


図1 計算例 ( $\mathbf{x}_l = [0, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{x}_r = [5, 0, 2]^T$ ,  $\mathbf{q}_l = [1, 0, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{q}_r = [1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}]^T$ )

となる．区間  $[\xi_k, \xi_{k+1}]$  における曲げポテンシャルエネルギーは

$$U_k = \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \kappa(\xi; \xi_k, \xi_{k+1}, \mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) d\xi$$

と表される．各区間における曲げポテンシャルエネルギーを計算し，それらを足し合わせることで，ロボットの曲げポテンシャルエネルギーを計算する．上式右辺の積分は，数値的に計算することができる．以上の計算より，ポテンシャルエネルギー  $U$  は， $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  の関数であることがわかる．また，点  $P(\xi_k)$  と  $P(\xi_{k+1})$  の相対位置

$$\mathbf{d}_k = \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \mathbf{e}_\xi(\xi; \xi_k, \xi_{k+1}, \mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}) d\xi$$

の値は，数値的に計算することができる．これより，左端と右端の相対位置

$$\mathbf{x}(L) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \dots + \mathbf{d}_n$$

を求めることができる．左端の位置  $\mathbf{x}_l$  と右端の位置  $\mathbf{x}_r$  が与えられると，上式は  $\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_l$  に一致する．これより制約  $\mathbf{X} = \mathbf{x}(L) - \mathbf{x}(0) - (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_l)$  を得る．この制約  $\mathbf{X}$  は， $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  の関数である．さらに，左端と右端の接線方向が，それぞれ四元数ベクトル  $\mathbf{q}_l, \mathbf{q}_r$  で与えられるとする．結局

$$\text{minimize } U(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)$$

$$\text{subject to } \mathbf{X}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_l = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_n - \mathbf{q}_r = \mathbf{0}$$

$$Q_k = 0, \quad (k = 2, 3, \dots, n-1)$$

を解くことにより， $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$  の値を求めることができる．

#### 4. 計算例

例として， $L = 10.0$ ， $R_f = 1.0$  と設定し， $\mathbf{x}_l = [0, 0, 0]^T$ ， $\mathbf{x}_r = [5, 0, 2]^T$ ， $\mathbf{q}_l = [1, 0, 0, 0]^T$ ， $\mathbf{q}_r = [1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}]^T$  に対する変形形状を求める．区間  $[0, L]$  を 10 区間に等分割して  $\mathbf{q}(\xi)$  を計算する．上記の最適化問題を数値的に計算した結果を図 1 に示す．シミュレーションは，Intel Core i5 2 GHz，メモリ 8 GB のノート PC 上の Matlab R2020a で実行した．計算時間は約 103 秒であった．なお，得られる変形形状は，最適化において与える初期形状に依存する．

#### 5. 結言

本報告では，線状ソフトロボットの三次元静的変形を，特異点を持たない四元数により表す手法を提案した．今後，提案手法を用いて，線状ソフトロボットの三次元動的変形をモデリングする予定である．

謝辞 本研究は JSPS 科研費，新学術領域研究「ソフトロボット学」19H05337 の助成を受けた．

#### 参考文献

- [1] H. Wakamatsu and S. Hirai, “Static Modeling of Linear Object Deformation Based on Differential Geometry”, Int. J. Robotics Research, Vol. 23, No. 3, pp. 293–311, 2004.
- [2] 平井 慎一, 混合座標法に基づく線状ソフトロボットの動的モデリング, ロボティクス・メカトロニクス講演会 2020, オンライン, 2020.