

線状部品の動的変形形状の解析

Dynamic Analysis of Deformation of Linear Objects

正 若松 栄史 (大阪大学)

小林 正樹 (清水国際特許事務所)

正 平井 慎一 (立命館大学)

正 松山 欽一 (大阪大学)

正 荒井 栄司 (大阪大学)

Hidefumi WAKAMATSU, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka 565

Masaki KOBAYASHI, Shimizu National Patent Attorney's Office,

3-4-26 Minamifunaba, Chuo-ku, Osaka, 542

Shinichi Hirai, Ritsumeikan University, 1916 Noji, Kusatsu, Shiga 525-77

Kinichi MATSUYAMA, Osaka University

Eiji ARAI, Osaka University

An approach to analysis of dynamic deformation of linear objects such as wires is presented. It is important because dynamic deformation of such deformable objects is often utilized in order to manipulate them successfully. Firstly, the potential energy and the kinetic energy of a linear object are formulated by use of Eulerian angles. Secondly, Geometric constraints imposed on the object are also formulated. Thirdly, the equations of motion are derived by use of Hamilton's principle and Euler's approach. Finally, a numerical example of 2-dimensional dynamic deformation is shown.

Key words : deformation, deformable objects, manipulation, dynamics

1. 緒言

現在、生産現場において、自動化に困難を伴う工程のひとつとして、やわらかく変形しやすい部品のマニピュレーションがあげられる。そのような部品のマニピュレーション過程においては、さまざまな変形形状が存在し、またその遷移の過程も多様であるため、変形形状が予測できるか否かによって、作業の成否に大きく影響を与える。また、人間が変形しやすい部品のマニピュレーションを行なう際には、部品の静的変形のみでなく、時間的に変化する動的変形を積極的に利用して作業を効果的に進める場合がある。したがって、変形しやすい部品のマニピュレーションにおいては、部品の変形過程の解析が、自動化の促進のために不可欠である。そこで本報告では、変形しやすい部品としてコードや針金のような線状部品を取り上げ、その動的変形形状について解析を進める。

2. 線状部品の動的変形形状の定式化

本報告では、線状部品には弾性変形のみが生じると仮定し、部品にはたらく粘性の影響は無視できるものとする。また、部品は中心軸方向には伸縮しないものとし、変形としては曲げ・ねじれ変形のみを考える。この時、ハミルトンの原理とオイラーの変分原理により線状部品の運動方程式を導く。

2.1 幾何形状の表現

図1に示すような長さ L の直線状部品の三次元空間内での変形を定式化する。部品の一方の端点に物体座標系 $O^{\prime}\text{-}\xi\eta\zeta$ の原点をとる。そこから部品に沿った距離を s で表し、その点における中心軸方向に ζ 軸を、また、初期状態(無変形状態)において、空間座標系 $O\text{-}xyz$ の x 軸、 y 軸に一致するように ξ 軸、 η 軸を定める。変形による物体座標系の空間座標系に対する回転をオイラー角 $\phi(s, t)$ 、 $\theta(s, t)$ 、 $\psi(s, t)$ を用いて表すと、ある時間における物体上のある点 $P(s, t)$ の位置 $\mathbf{x}(s, t) = [x(s, t) \ y(s, t) \ z(s, t)]^T$

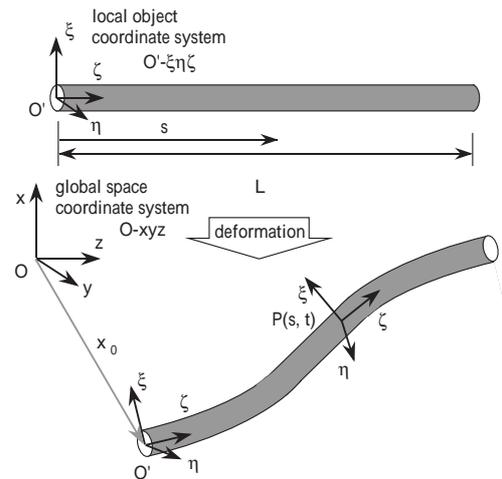


Fig. 1 3-dimensional deformation of a linear object

は、次のように与えられる。

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^s \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} ds = \mathbf{x}_0 + \int_0^s \boldsymbol{\zeta} ds \quad (1)$$

ここで、 $\boldsymbol{\zeta}$ は部品の中心軸方向単位ベクトルであり、 \mathbf{x}_0 は物体座標系 $O^{\prime}\text{-}\xi\eta\zeta$ の原点の位置とする。

2.2 エネルギーの定式化

線状部品の時間 t におけるポテンシャルエネルギー $U(t)$ は、次式のように表すことができる。

$$U(t) = \frac{R_f}{2} \int_0^L \kappa^2 ds + \frac{R_t}{2} \int_0^L \chi^2 ds \quad (2)$$

ここで、 R_f は曲げ剛性、 R_t はねじり剛性である。また、 κ は曲率、 χ はねじれ率であり、オイラー角を用いて

それぞれ次のように表せる .

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= \theta'^2 + \phi'^2 \sin^2 \theta \\ \chi^2 &= (\psi' + \phi' \cos \theta)^2\end{aligned}$$

ここで, θ' などは s に関する微分を表すものとする .

次に, 時間 t における部品の運動エネルギー $T(t)$ は, 次式のように表すことができる .

$$T(t) = \frac{\rho}{2} \int_0^L v^2 ds + \frac{I_1}{2} \int_0^L \omega_1^2 ds + \frac{I_2}{2} \int_0^L \omega_2^2 ds \quad (3)$$

ここで, ρ は単位長さあたりの質量, I_1 は中心軸に垂直な軸回りの慣性モーメント, I_2 は中心軸回りの慣性モーメントである . また, v は速度ベクトル, ω_1 は中心軸方向の回転の角速度, ω_2 は中心軸回りの回転の角速度であり, それぞれ次のように表せる .

$$\begin{aligned}v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \\ \omega_1^2 &= \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ \omega_2^2 &= (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2\end{aligned}$$

ここで, $\dot{\theta}$ などは t に関する微分を表すものとする .

2.3 拘束条件の定式化

部品には, マニピュレーションの過程においてさまざまな拘束条件が課せられる . 部品上のある二点 $P_1(s_1, t)$ と $P_2(s_2, t)$ との相対位置が, マニピュレータ等によって時間 t_1 から t_2 までの間, $l = [l_x \ l_y \ l_z]^T$ で表される関係に拘束される場合には, 式 (1) より, 部品は次のような条件を満たさなくてはならない .

$$\int_{s_1}^{s_2} \zeta ds - l = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (4)$$

また, 点 $P_1(s_1, t)$ における部品のオイラー角表現による姿勢 $\theta(s_1, t) = [\phi(s_1, t) \ \theta(s_1, t) \ \psi(s_1, t)]^T$ が, 時間 t_1 から t_2 までの間, θ_a に拘束される場合には, 部品は次のような条件を満たさなければならない .

$$\theta(s_1, t) - \theta_a = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (5)$$

式 (4), (5) のような幾何学的制約条件式を, 一般的に $g_i(s, t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots$) と表すことにする . この時, ハミルトンの原理により, 部品の動的変形形状は, 以下の式を最小化することによって求められると考えられる .

$$F = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \lambda_i \cdot g_i dt \quad (6)$$

ここで, $\lambda_i = \lambda_i(s, t)$ ($i = 1, 2, \dots$) はラグランジュの未定関数とする . 上式より, 関数ベクトル $\alpha(s, t) = [\phi \ \theta \ \psi \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots]^T$ を定義し, $p = \alpha_k'$, $q = \alpha_k$ とおくと, オイラーの変分原理により, 運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial s} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial s} \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 \alpha_k}{\partial s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \\ + \frac{\partial^2 \alpha_k}{\partial s \partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial \alpha_k} \\ + \frac{\partial^2 \alpha_k}{\partial t^2} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \alpha_k}{\partial s \partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} = 0\end{aligned} \quad (7)$$

で与えられる . ここで, $f = T' - U' + \sum \lambda_i \cdot g_i$ とする .

3. 計算アルゴリズム

関数ベクトル $\alpha(s, t)$ の t に関する 2 回微分 $\ddot{\alpha}(s, t)$ を, 次のように s に関する基底関数 $e_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots$) の線形和に展開する .

$$\ddot{\alpha}_k(s, t) = \sum_i a_i^k \cdot e_i(s), \quad t \in [t, t + \Delta t] \quad (8)$$

$\alpha(s, t)$, $\dot{\alpha}(s, t)$ の値が既知であれば, 式 (7) で表される運動方程式から数値計算によって式 (8) の係数 a_i^k を求めることにより, $\alpha(s, t + \Delta t)$, $\dot{\alpha}(s, t + \Delta t)$ の値を決定できる . 以上の手順を繰り返すことによって, 線状部品の動的変形形状を求めることができる .

4. 数値計算例

例として, xz 平面内で変形する線状部品を考える . 初期状態において, 部品の両端は回転支持されており, 両端間距離は $0.6L$ に縮められている . この時の部品の形状は, 与えられた条件下でポテンシャルエネルギー U を最小化することにより求めることができる [1] . 以上の状態から $s = L$ における拘束を取り除き, その後の部品の動的変形形状を求める . この時の部品のポテンシャルエネルギー $U(t)$ および運動エネルギー $T(t)$ はそれぞれ次のように表される .

$$\begin{aligned}U(t) &= \frac{R_f}{2} \int_0^L \theta'^2 ds \\ T(t) &= \frac{\rho}{2} \int_0^L (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) ds + \frac{I_1}{2} \int_0^L \dot{\theta}^2 ds\end{aligned}$$

また, 運動方程式は次のようになる .

$$R_f \theta'' - \ddot{\theta} \left\{ I_1 + \frac{\rho}{2} (x^2 + z^2) \right\} - \rho (\ddot{x}z - \dot{x}\dot{z}) = 0$$

ここで, $R_f/I_1 = 8.47 \times 10^8$, $\rho/I_1 = 2.13 \times 10^{10}$ とする . この線状部品の動的変形形状の数値計算結果を図 2 に示す .

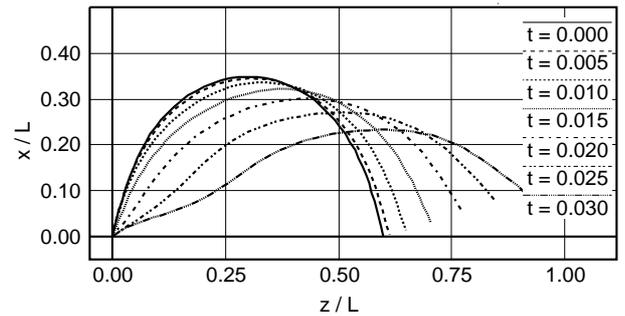


Fig. 2 Numerical example of dynamic deformation

5. 結論

本報告では, 線状部品のポテンシャルエネルギー・運動エネルギーと幾何学的拘束条件とを定式化し, 部品の運動方程式を導出した . 次にこの運動方程式を用いて, 平面内で変形する線状部品の動的変形形状を数値的に求めた .

【参考文献】

[1] H. Wakamatsu, S. Hirai, and K. Iwata : Modeling of Linear Objects Considering Bend, Twist, and Extensional Deformation, Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, pp.433-438 (1995).