

線状柔軟物体の動的変形のモデリング

矢野 巧造, 平井 慎一
立命館大学 理工学部

Dynamic Modeling of Deformable Strings

Kouzoh YANO, Shinichi HIRAI
Dept. of Robotics, Ritsumeikan University

Abstract - *Dynamic modeling of deformable strings is presented. It is necessary to take account of dynamic behavior of deformable strings in their quick manipulation. First, we will derive the equation of motion of deformable strings. Second, a simulation method of the string deformation is developed. Finally, a result of the computation is shown.*

Keywords: manipulation, simulation, deformable objects, dynamic behavior, modeling

1. はじめに

ロボットや機械システムが求められている分野には、柔軟物体を対象とする作業が多い。その中には、高速な操作など、物体の動的な挙動を用いる作業がある。しかし、柔軟物体の動的な挙動に関しては、あまり解析が進められておらず、モデリング技法が確立していない。そこで、本報告では、線状柔軟物体を対象として、その動的モデルを構築する。

まず、ハミルトンの原理に基づいて、運動方程式を導く。次に、運動方程式から、変形状を数値的に導くアルゴリズムを構築する。構築したアルゴリズムを用いて、動的な変形状を計算した例を示す。

2. 動的モデルの数理的解析

Fig. 1 のように、一方の端点より物体に沿って距離 s の点を $P(s)$ とする。時刻 t において、点 $P(s)$ の接線と水平面が成す角度を $\theta(s, t)$ で表す。空間内に座標系 $O-xz$ を設定する。時刻 t における点 $P(s)$ の x, z 座標値を、それぞれ $x(s, t), z(s, t)$ と表す。各座標値は、角度 $\theta(s, t)$ を用いて、次のように表される。

$$x(s, t) = x(0, t) + \int_0^s \cos \theta(s, t) ds \quad (1)$$

$$z(s, t) = z(0, t) + \int_0^s \sin \theta(s, t) ds \quad (2)$$

物体は、時刻 $t = 0$ で、水平面内にあり、静止状態であると仮定する。また、物体左端の位置は、固定されていると仮定する。よって、初期条件、境界条件は、次

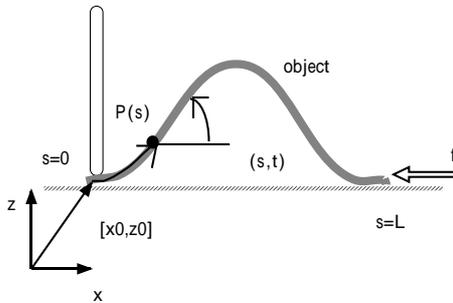


Fig.1: Description of deformation of string

のように表される。

$$\begin{aligned} \theta(s, 0) &= 0, \forall s \in [0, L] \\ \frac{\partial \theta}{\partial t}(s, 0) &= 0, \forall s \in [0, L] \\ x(0, t) &= x_0 \text{ (一定)} \\ z(0, t) &= z_0 \text{ (一定)} \end{aligned}$$

本報告では、運動方程式を導く方法として、ハミルトンの原理を用いる。物体の運動エネルギーを T 、ポテンシャルエネルギーを U 、外力 f による移動量を Δx とすると、ハミルトンの原理は、次式で表される。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + f \Delta x) dt = 0 \quad (3)$$

ここで δ は変分を表す。物体の線密度を ρ 、物体の曲げ剛性係数を R とすると、運動エネルギー T 、ポテンシャルエネルギー U 、外力による仕事 $f \Delta x$ は次式で与えられる。

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 \right] ds \quad (4)$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} R \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 ds \quad (5)$$

$$f \Delta x = f \int_0^L (1 - \cos \theta) ds \quad (6)$$

(4)(5)(6) 式を (3) 式に代入し、変分法を適用すると、次の運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \sin \theta \int_s^L \rho \frac{\partial^2 x(u, t)}{\partial t^2} du - \cos \theta \int_s^L \rho \frac{\partial^2 z(u, t)}{\partial t^2} du \\ + R \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + f \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

特に $\rho = 0$ としたときには、

$$R \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + f \sin \theta = 0$$

となり、静的な解析の式¹⁾と一致する。

3. 動的変形のシミュレーション

前節で求めた運動方程式をもとにして、線状物体の動的な形状変形を計算機シミュレーションする。

(7) 式は、 $x(s, t)$ と $z(s, t)$ の 2 階微分を含む。関数 $x(s, t)$ と $z(s, t)$ は、(1)(2) 式で与えられる。関数 $x(s, t)$ と $z(s, t)$ の 2 階微分は、 $\theta(s, t)$, $\dot{\theta}(s, t)$, $\ddot{\theta}(s, t)$ を用いて表すことができる。したがって、(7) 式の左辺は、 $\theta(s, t)$, $\dot{\theta}(s, t)$, $\ddot{\theta}(s, t)$ の関数とみなし、次のように表すことができる。

$$h(\theta(s, t), \dot{\theta}(s, t), \ddot{\theta}(s, t)) = 0 \quad (8)$$

静的な形状の計算においては、角度 $\theta(s)$ を、あらかじめ与えた基底関数 $\varphi_0(s), \varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s)$ の線形結合で表している¹⁾。

本報告では、動的な形状変形を扱うので、基底関数の係数を時間 t の関数とみなす。すなわち、角度 $\theta(s, t)$ を次式で表す。

$$\theta(s, t) = \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\varphi}(s) = \sum_{i=0}^n a_i(t) \varphi_i(s) \quad (9)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= [a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)] \\ \boldsymbol{\varphi}(s) &= [\varphi_0(s), \varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s)] \end{aligned}$$

ベクトル $\mathbf{a}(t)$ は、時刻 t に依存する係数ベクトルである。ベクトル $\boldsymbol{\varphi}(s)$ は既知の基底関数である。(9) 式を (8) 式に代入すると、(8) 式は次式で表されることがわかる。

$$h(\mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{a}}(t), \ddot{\mathbf{a}}(t), s) = 0 \quad (10)$$

(10) 式は、係数ベクトル $\mathbf{a}(t)$ に関する 2 階微分方程式である。従って、(10) 式を解くことにより、動的な形状変化を求めることができる。

(10) 式は、係数ベクトル $\mathbf{a}(t)$ に関する非線形の微分方程式であり、解析的に解くことは困難である。そこで、数値的に (10) 式を解く。まず、時刻 t を離散化し、微分方程式 (10) を差分方程式に変換する。時間間隔を T とし、時刻 $kT (k = 0, 1, \dots)$ における形状を求めるものとする。時刻 kT における係数 $a_i(kT)$ を a_i^k と表し、係数ベクトル \mathbf{a}^k を次式で定義する。

$$\mathbf{a}^k = \mathbf{a}(kT) = [a_0(kT), a_1(kT), \dots, a_n(kT)]^T \quad (11)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{a}}^k$, $\ddot{\mathbf{a}}^k$ を前進差分を用いて表すと次式を得る。

$$\dot{\mathbf{a}}(kT) = \frac{\mathbf{a}^{k+1} - \mathbf{a}^k}{T} \quad (12)$$

$$\ddot{\mathbf{a}}(kT) = \frac{\mathbf{a}^{k+2} - 2\mathbf{a}^{k+1} + \mathbf{a}^k}{T^2} \quad (13)$$

(11)(12)(13) 式を、(10) 式に代入すると、次式を得る。

$$h(\mathbf{a}^k, \mathbf{a}^{k+1}, \mathbf{a}^{k+2}, s) = 0 \quad (14)$$

(14) 式は、係数ベクトル $\mathbf{a}^k, \mathbf{a}^{k+1}, \mathbf{a}^{k+2}$ を含む。ここで、ベクトル \mathbf{a}^{k+1} と \mathbf{a}^k の値が与えられているとする。また、(14) 式は、任意の $s \in [0, L]$ に対して成り立たなければならない。この条件は、次式と等価である。

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}^{k+2}) &\triangleq \int_0^L [h(\mathbf{a}^k, \mathbf{a}^{k+1}, \mathbf{a}^{k+2}, s)]^2 ds \\ &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

そこで、(15) 式に既知のベクトル \mathbf{a}^{k+1} と \mathbf{a}^k の値を代入し、目的関数 $E(\mathbf{a}^{k+2})$ を最小にする \mathbf{a}^{k+2} を求める。目的関数の最小化には、乗数法とシンプレックス法を用いる。

時刻 $0, T$ における係数ベクトル \mathbf{a}^0 ならびに \mathbf{a}^1 を初期値として与える。以上の過程を順次繰り返すことにより、時刻 $kT (k = 0, 1, \dots)$ における \mathbf{a}^{k+2} を求めることができる。算出した \mathbf{a}^{k+2} を (9) 式に代入して $\theta(s, t)$ を求め、 $\theta(s, t)$ を (1)(2) 式に代入して形状を求めることができる。

4. シミュレーションの実行結果

長さ $L = 100$ 、線密度 $\rho = 0.15$ 、曲げ剛性係数 $R = 0.03$ の線状物体の動的変形を求めた。右端は、 $k = 0$ のとき x 軸上 97.7 の位置、 $k = 1$ のとき x 軸上 90.0 の位置とし、左に向かって 300 の力を作用させると設定した。また、時間間隔 $T = 0.001$ とした。基底関数は、次のように与えた。

$$\boldsymbol{\varphi}(s) = \left(1, s, \sin \frac{2\pi s}{L}, \cos \frac{2\pi s}{L}, \sin \frac{4\pi s}{L}, \cos \frac{4\pi s}{L}\right)$$

変形形状の計算機シミュレーションの結果を、Fig.2 に示す。

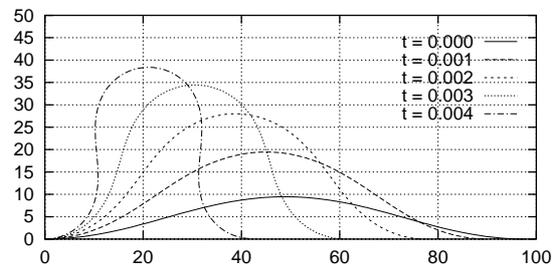


Fig.2: Result of computing deformation

5. おわりに

本研究では、線状柔軟物体に対して動的解析により運動方程式を導き、慣性という動的要素を取り入れたモデルを構築した。さらに、動的な挙動のシミュレーションを試みた。今後は実際の物体を対象としたモデルを構築し、そのモデルと実際の柔軟物との形状の比較実験を行う予定である。

【参考文献】

- 1) Hirai, S., Noguchi, H., and Iwata, K., *Modeling of Deformable Thin Parts for Their Manipulation*, Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Vol. 4, pp. 2955-2960, San Diego, May, 1994